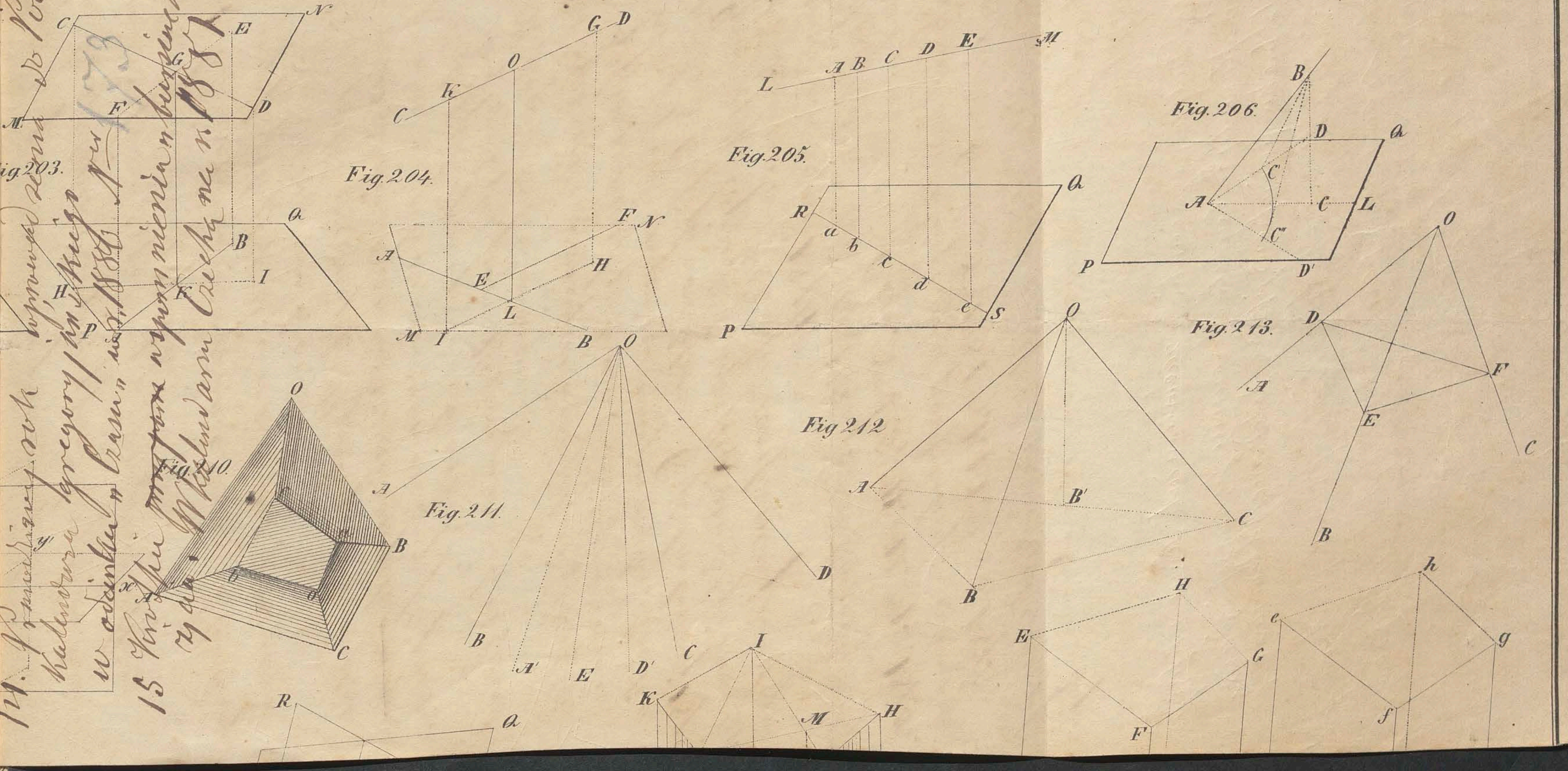
N. Inv. 4191.

Elementarne sposoby rozwiązania zrównań liczbowych dotąd znane i więcej rozgłosu mające.

Rękopis składa się z 26 arkuszy

Tablica VIII.



Oprócz prac moich wymienionych
w Encyklopedyi wydanej przez Orgelbranda
w Warszawie, później po przyjściu w stan
spoczynku napisałem:

1. Elementarne rozwiązanie zrównań liczbowych
wyższych stopni. Ten rękopis spoczywa
dotąd u mnie w biurku.

2. Dopełnienie mojej Algiebry, obejmujące
rozwiązanie zadań nieoznaczonych ~~drugo~~
prowadzących do zrównań drugiego stopnia.
Rękopis spoczywa w biurku.

3. Arytmetykę początkową w dwóch częściach.
Rękopis także w biurku.

4. Pogadanki nauczyciela wiejskiej szkółki
z gospodarzami tyczące się o kulistości ziemi
(*) oraz jej dziennym i rocznym ruchu. Druko-
wane w Cieszynie nakładem Czytelni ludowej 1872.

5. Gwiazdy spadające, kule ogniste, aerolity i komety.
Drukowane w Bibliotece warszawskiej w zeszycie
grudniowym 1874.

6. Trzęsienia ziemi i Wulkany. Drukowany arty-
kuł w odcinku „Czasu" N.ra 225, 241, 242, 243. 1874 r.

7. Świat widzialny i świat powszechny. Drukowane
w odcinku „Czasu" N.ra 128, 129, 131, 132, z r. 1875

8. Co sądzić należy o zamieszkaniu nieskończonych
światów? Drukowane w odcinku „Czasu" z Lipca
1876 r.

(*) 9. Dalsze pogadanki o zaćmieniach Słońca i Księżyca
przesłane tejże Czytelni (: rozumie się na jej żądanie :)
dla braku funduszów jeszcze dotąd niedrukowane.

12. W Bibliotece Ossolińskich (: w zeszytach nie pa-
miętam nawet roku :) artykuł pod tytułem „Najnowsze
odkrycia w Astronomii"

13. tudzież inny artykuł pod tytułem „Wynalazek i na-
stępne udoskonalenie teleskopów"

10. Fizyczny skład słońca. Drukowane w odcinku „Czasu"
w r. 1877

11. Nowe miary i Wagi, krótki artykuł w Kalendarzu
J. Czecha na rok 1879.

Którykolwiek przystępuje do rozwiązania zrównania otrzymanego z badań w jakichkolwiek gałęzi nauk matematycznych lub wprost podanego, wiadomem być mu powinno, że wszelkie usiłowania matematyków nie doprowadziły do rozwiązania ogólnie t. j. algebraicznie wyższego stopnia zrównań nad czwarty. A ponieważ wzory algebraiczne dające pierwiastki zrównań trzeciego i czwartego stopnia już są tak do rachunku niewygodne że się musiano uciekać do innych sposobów na ich rozwiązanie, ~~[illegible]~~, wnioskowano zatem, że wzory, gdyby je otrzymać można, na rozwiązanie zrównań piątego, szóstego i wyższych stopni, będą nieporównanie zawikłańszemi i mniej wygodniejszemi niż wzory dla rzeczonych dwóch stopni. Z tego to powodu, tak we względzie samej nauki pożądańszy byłoby rzeczą znaleźć ogólne rozwiązanie zrównania każdego stopnia, czego zapewne nigdy matematycy nie dokażą, uważając że w praktycznem życiu każde zrównanie sprowadza się w końcu do zrównania liczbowego czyli takiego że wszystkie współczynniki różnych jego wyrazów są liczbami, rzucono się do szukania sposobu rozwiązania liczbowych zrównań każdego stopnia. A ktoby nawet zastanowiono o przystosowaniu rozwiązania odgebraicznego zrównania wyższego stopnia [illegible] wspólnie przez Vieta i aż

Dotąd podano już więcej niż dziesiątek tych sposobów, mniej lub więcej pewnych, mniej lub więcej do rachunku wygodnych, prędzej lub wolniej prowadzących do celu. Chcąc każdy z tych sposobów dokładnie poznać i ducha jego pojąć, potrzeba przy niektórych znać dobrze Trygonometryję, Geometryję analityczną albo raczej teoryję linij krzywych i rachunek wyższy. Jeżeli jednak tylko chodzi o samo rozwiązanie zrównania nie wchodząc w ducha ~~tego~~ sposobu, tedy dość poznać ogólne własności zrównań algebraicznych i umieć obejść się z rachunkiem bądź liczbowym bądź też logarytmicznym, czyli arytmetyką dostatecznie [illegible]. Zamiarem moim jest podać ~~następnie~~ sposoby rozwiązania zrównań liczbowych tylko elementarne znakomitsze, mające więcej rozgłosu między Matematykami, wspomnę wszelako i o innych chociaż w krótkości. Kiedy bowiem żaden z rzeczonych sposobów nie jest wolnym od większego lub mniejszego co do praktyczności zarzutu, i kiedy ciągle jeszcze pracują w tym kierunku Matematycy, chciałbym zatem młodzież naszą poświęcającą się przedmiotom matematycznym, zapoznać ze znanemi dotąd sposobami rozwiązania zrównań liczbowych wytłumaczywszy jej co niezupełnie dotąd zrobiono, gdyż ją z pewnością zaliczam w szeregi przyszłych w tym kierunku pracowników.

Nim jednak przystąpię do wykładania każdego z elementarnych sposobów, stawię przed oczy niezbędnych się twierdzenia i to wszystko co jest potrzebnem skoro mamy jakie zrównanie do rozwiązania.

[Margin note:] Plon jaki się dotąd pokazał z prac różnych Matematyków na tem polu starze świeższe

[Margin note:] braicznie zrównania wyższego stopnia, ~~[illegible]~~ praktycznej Matematyce, z powodu niezmiernego zawikłania wzorów, zdawać się będą i w takim razie do wymienionych sposobów wymijających też wzory.

[Inserted slip, written sideways:] Sposób [illegible] wymienionych w Encyklopedyi wydanej przez Orgelbranda [illegible]

I.

§1. Zrównaniem algebraicznem nazywamy każde wyrażenie złożone z dwóch części znakiem równości (=) z sobą połączonych, a w których jest jedna lub więcej ilości nieznanych, zwyczajnie końcowemi głoskami abecadła, u, x, y, z ... oznaczonych, i w rozmaity sposób, t.j. przez rozmaite działania arytmetyczne ze znanemi połączonych. W takiem zrównaniu znak (=) bynajmniej nie znaczy że jedna część, t.j. stojąca po lewej stronie oznaczonego znaku, równa się rzeczywiście części stojącej z prawej strony, ale raczej wyraża warunek, albo lepiej żądanie znalezienia dla nieznanej lub nieznanych ilości takich wartości, któreby położone w miejsce nieznanych istotnie tęż równość sprowadziły. W takim razie dopięto się zamierzonego celu i mówimy że dane zrównanie jest rozwiązanem. Oznaczone części nazywamy stronami zrównania, mianowicie: stojącą po lewej stronie, pierwszą, tę zaś po prawej, drugą stroną zrównania. Jedna z tych stron zrównania może też być zero, co wtenczas będzie, gdy jedną z nich przeniesiemy całkiem do drugiej, czyli gdy obie części umieścimy po jednej stronie znaku (=). Tego w każdym razie dokazać możemy opierając się na znanych pewnikach, że z dwiema ilościami, za które tu dwie strony zrównania uważamy, przedsiębiorąc też same przemiany czyli działania arytmetyczne, mianowicie zaś dodając do nich lub odejmując od nich, mnożąc je lub dzieląc przez też same ilości, jako też podnosząc je do tejże samej potęgi, lub wyciągając z nich pierwiastki tego samego stopnia, lub nareszcie biorąc ich logarytmy w tymże samym układzie czyli przy tejże samej zasadzie, w niczem ich równości nie naruszamy. Następnie mówić tylko będę o zrównaniach w których się znajduje jedna tylko ilość nieznana do różnych potęg podniesiona.

§2. Zrównanie którego współczynniki mnożące różne potęgi ilości nieznanej są głoskami abecadła t.j. ogólne, nazywa się też zrównaniem ogólnem, skoro zaś też współczynniki są liczbami, albo nawet głoskami ale za liczby uważanemi, zwać je będziemy zrównaniami liczbowemi, o jakich tu wyłącznie mówić zamierzam. Najwyższy wykładnik ilości nieznanej dla zrównania już uporządkowanego, t.j. w którem wykładniki ilości nieznanej w wyrazach po sobie następujących idą w porządku liczb naturalnych rosnących lub malejących, nazywa się stopniem zrównania. Skoro wszystkie wyrazy zrównania, t.j. obie jego strony, umieścimy z jednej na zasadzie w poprzednim § wspomnianej, po drugiej stronie wypadnie naturalnie zero; w takim przypadku mówimy, żeśmy zrównanie przyprowadzili do zera. Takie zrównanie, wyswobodzone i oczyszczone od niewymierności oraz uporządkowane, przybiera zawsze następującą postać

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots\dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

które przez stosowne przerobienie, mianowicie przez podzielenie całego zrównania przez a_n i potem przerobienia tegoż na inne, w którem by współczynnik najwyższej potęgi był 1 a wszystkie inne liczbami całkowitemi, przybiera postać

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^3 + \dots\dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

w którem naturalnie współczynniki $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3} \dots a_3, a_2, a_1, a_0$ inne wyrażają liczby niż w postaci pierwszej. Te wszelako współczynniki tak w pierwszem jako i drugiem zrównaniu, uważać zawsze będziemy jako liczby całkowite jak również wykładnik n który tu wyraża stopień zrównania jako najwyższy nieznanej ilości x.

Wyrażając się krótko, pisać będziemy będź to pierwszy bądź drugiy po stać równanie następnie $f(x)=0$, a przeczytamy: funkcyja x równa się zero. Wyraz bowiem funkcyja oznacza każdy wielomian, a w ogólności każde wyrażenie, w którém się znajduje jedna lub więcej ilości nieznanych, w różny sposób ze znanemi połączonych. Jeżeli w wielomianie znajduje się tylko jedna nieznana ilość x, wielomian ten piszemy jak wyżej $f(x)$; gdyby w tymże wielomianie znajdowały się dwie x i y, trzy x, y, z i t. d. ilości nieznane, pisałoby się krótko też wielomiany $f(x,y)$, $f(x,y,z)$ i t. d. Ponieważ tu mówić będę tylko o równaniach o jednej nieznanej, więc też u nas zawsze znaczyć będzie $f(x)$ wielomian równania, tak że

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

albo

$$f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots\dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Jeszcze tu raz powtórzę, że ~~[illegible]~~ równanie n-tego stopnia napisane w postaci F, nie znaczy wcale, iż wielomian z lewej strony równa się zero, ale raczej wzywa nas do wynalezienia takiej wartości, któraby w miejsce x położona, uczyniła rzeczywiście ten wielomian równym zero.

F $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

§3. Każda wartość bądź rzeczywista bądź urojona, położona za x w równaniu $f(x)=0$ i sprowadzająca jego wielomian do zero, nazywa się pierwiastkiem tegoż równania. Każde równanie tyle ma wartości sprowadzających rzeczony wielomian do zero czyli pierwiastków, ile ma jedności stopień równania. ~~to~~ Każdego z tych pierwiastków wyobrażnikiem jest x. Jeżeli od tego wyobrażnika odejmie się którykolwiek pierwiastek, różnica ta nazywa się czynnikiem pierwiastkowym. Tak np. jeżeli jakie równanie ma pierwiastki $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, różnice $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, $x-\delta$ będą czynnikami pierwiastkowemi. F Gdyby pierwiastkami były wyrażenia urojone $\alpha+\sqrt{-\beta}$, $\alpha-\sqrt{-\beta}$ i t. d. czynnikami pierwiastkowemi będą $x-\alpha-\sqrt{-\beta}$, $x-\alpha+\sqrt{-\beta}$ i tak o innych. Takie czynniki nazywają niektórzy Matematycy linijowemi, która nazwa zaczerpnięta jest z Geometryi analitycznej, i dają im ogólną postać $ax+b$. Łącząc z sobą przez mnożenie po dwa takie czynniki, otrzymuje się czynnik kwadratowy o ogólnej postaci ax^2+bx+c. Pierwiastki równania $f(x)=0$, znaczyć zawsze będą przez $x_1, x_2, x_3 \dots x_{n-1}, x_n$.

F Jeżeli pierwiastkami równania są $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta \dots$ czynnikami pierwiastkowemi będą $x+\alpha$, $x+\beta$, $x+\gamma$, $x+\delta, \dots$

§4. Dowodzi się bardzo łatwo że wielomian równania podzielnym jest bez reszty przez czynnik pierwiastkowy. Jeżeli bowiem x_1 jest pierwiastkiem równania $f(x)=0$, tedy dzieląc $f(x)$ przez $x-x_1$, oznaczmy całkowity z tego dzielenia otrzymany iloraz przez q a resztę przez r, tedy według Arytmetyki będzie

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = q + \frac{r}{x-x_1}$$

albo

$$f(x) = (x-x_1)q + r$$

Położywszy tu $x=x_1$, będzie

$$f(x_1) = (x_1-x_1)q + r \quad \text{albo} \quad f(x_1) = 0 + r$$

Ale x_1 jest pierwiastkiem równania, więc według powyższego $f(x_1)=0$, przeto też $r=0$ t. j. wielomian równania podzielnym jest bez reszty przez czynnik pierwiastkowy.

Ponieważ to, co się tu rzekło, jest dowód dla każdego innego czynnika pierwiastkowego i ponieważ dzielenie przez podobny czynnik zniża wielomian równania o jeden stopień, t. j. iloraz z tego dzielenia otrzymany zamyka ilość nieznaną w najwyższym stopniu czyli potędze, która jest o 1 niższą niż takaż potęga w pierwotnem równaniu, zatem oznaczywszy, jak poprzednio przyjęliśmy, przez $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ pierwiastki, zaś iloraz otrzymany z podzielenia ~~wielomian $f(x)$~~ przez $f_1(x)$, będzie

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = f_1(x) \;----(\alpha)$$

W tem równaniu jak wiadomo jest $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots$ i oznaczywszy współczynniki ilorazu przez $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3} \ldots\ldots b_3, b_2, b_1$, będzie rzeczywiście $f_1(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + b_{n-2} x^{n-3} + \ldots\ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$

Ze równania (α) wypada

$$f(x) = (x-x_1) f_1(x) \;----(1)$$

Obie strony tego równania podzielmy przez $x - x_2$, tedy otrzymamy

$$\frac{f(x)}{x-x_2} = (x-x_1)\frac{f_1(x)}{x-x_2}$$

Ponieważ według poprzedzającego $f(x)$ jest bez reszty podzielnem przez $x-x_2$, zatem pierwsza strona tego ostatniego równania jest liczbą całkowitą, i druga więc strona takąż liczbą być musi. Lecz podzielna na tej drugiej stronie składa się z dwóch czynników, jeden przeto z nich koniecznie podzielnym być musi przez $x - x_2$ bez reszty. Czynnik atoli $x - x_1$ nie jest, jak widzimy, podzielnym przez $x - x_2$, przeto drugi t. j. $f_1(x)$ musi być podzielnym przez ten czynnik pierwiastkowy. Oznaczywszy tu równie nowy iloraz przez $f_2(x)$, mieć będziemy

$$\frac{f(x)}{x-x_2} = (x-x_1)\frac{f_1(x)}{x-x_2} = (x-x_1) f_2(x) \;\ldots\ldots(\beta)$$

Że wielomian $f_1(x)$ przez to dzielenie zniżył się ~~znowu~~ o jeden stopień, więc oznaczywszy współczynniki mnożące potęgi ilości nieznanej przez $c_n, c_{n-1}, c_{n-2} \ldots\ldots c_2, c_1, c_0$ będzie

$$f_2(x) = c_n x^{n-2} + c_{n-1} x^{n-3} + c_{n-2} x^{n-4} + \ldots\ldots + c_3 x + c_2$$

Z poprzedzającego równania (β) wypada

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2) f_2(x) \;---(2)$$

Tym samym zupełnie sposobem postępując oraz rozumując, znajdziemy

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) f_3(x) \;------(3)$$

gdzie

$$f_3(x) = d_n x^{n-3} + d_{n-1} x^{n-4} + d_{n-2} x^{n-5} + \ldots\ldots + d_4 x + d_3$$

Dalej znajdzie się

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) f_4(x) \;---(4)$$

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5) f_5(x) \;---(5)$$

Ponieważ każde dzielenie zniża poprzedni iloraz o jeden stopień, zatem dojdzie się tym sposobem do ilorazów drugiego i pierwszego stopnia, mianowicie dzieląc iloraz $f_{n-3}(x)$ przez $x - x_{n-2}$, otrzyma się iloraz stopnia drugiego $f_{n-2}(x)$, który dzieląc następnie przez $x - x_{n-1}$, otrzyma się iloraz $f_{n-1}(x)$, który będzie stopnia pierwszego. Ten nareszcie dzieląc przez $x - x_n$ znajdziemy na iloraz 1,* ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

* lub m_n podług tego jak pod drugą lub pierwszą postacią było równanie pierwotne $f(x) = 0$, czyli jak współczynnik mnożący najwyższą potęgę ilości nieznanej jest $= 1$ lub różny od 1.

Można przeto wypadki następnych dzieleń, czyli raczej ilorazy, tak napisać:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-x_1) f_1(x)\\
f_1(x) &= (x-x_2) f_2(x)\\
f_2(x) &= (x-x_3) f_3(x)\\
f_3(x) &= (x-x_4) f_4(x)\\
f_4(x) &= (x-x_5) f_5(x)\\
&-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\\
f_{n-3}(x) &= (x-x_{n-2}) f_{n-2}(x)\\
f_{n-2}(x) &= (x-x_{n-1}) f_{n-1}(x)\\
f_{n-1}(x) &= 1 . f_n(x) = x - x_n
\end{aligned}$$

albo

$$f_{n-1}(x) = m_n f_n(x) = m_n(x-x_n)$$

Jeżeli teraz w przedostatniem równaniu położymy wartość za $f_{n-1}(x)$ z ostatniego, a potem w następnem, w tenże postępując, wartość za $f_{n-2}(x)$ z przedostatniego i t. d. aż przyjdziemy do równania pierwszego i w tem położymy wartość za $f_1(x)$ wziętą z drugiego, otrzymamy w końcu

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(\ldots)(\ldots)(x-x_{n-3})(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

w razie że pierwotne równanie było w postaci drugiej $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots$

lub też $f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(\ldots)(\ldots)(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n)$

jeżeli w pierwszej postaci było równanie pierwotne $f(x)=0$, gdyż łatwo każdy dostrzeże że $b_n=a_n$, $c_n=b_n$, $d_n=c_n$ i t. d. t. j. że $m_n=a_n$

(Z tego się pokazuje że równanie $f(x)=0$ ma tyle pierwiastków ile największy wykładnik ilości niewiadomej ma jedności w sobie i że jego wielomian rozkłada na tyle czynników pierwiastkowych czyli linijowych. Pomijam tu dowód że też równanie nie może mieć więcej pierwiastków jako niezmiernie łatwy.

Ponieważ współczynnik a_n w niczem nie zmienia dowodu różnych twierdzeń jakie podano o równaniu $f(x)=0$, zatem w dalszym ciągu uważać będę zawsze ten współczynnik $=1$.

§5. Czynniki pierwiastkowe $x-x_1$, $x-x_2$, $x-x_3$ i t. d. powstają naturalnie z pierwiastków $x_1, x_2, x_3 \ldots$ dodatnych; gdyby atoli też pierwiastki były odjemne $-x_1, -x_2, -x_3 \ldots$, oczywiście że czynniki pierwiastkowe byłyby $x+x_1$, $x+x_2$, $x+x_3 \ldots$ a powyższe równanie pierwsze przybrałoby na następujące

$$f(x)=(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)(\ldots)(\ldots)(x+x_{n-1})(x+x_n)$$

W tem powyższem równaniu wykonawszy wskazane mnożenia otrzymamy naturalnie pierwotne równanie pod drugą postacią t. j.

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots\ldots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

w którem znajdziemy

$$a_{n-1}=-(x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}+x_n)$$
$$a_{n-2}=+(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots x_2x_n+x_3x_4+\ldots+x_{n-1}x_n)$$
$$a_{n-3}=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_2x_5+\ldots\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)$$
$$a_{n-4}=+(x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_5+\ldots\ldots+x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1=\pm(x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}+x_1x_2x_3\ldots x_{n-2}x_n+\ldots+x_2x_3x_4\ldots x_{n-1}x_n)$$
$$a_0=\mp x_1x_2x_3x_4x_5\ldots\ldots x_{n-2}x_{n-1}x_n$$

z czego jasno wyczytać można czem są współczynniki równania uporządkowanego, mianowicie że są sumami kombinacyi pierwiastków tegoż równania i są zarazem wyrażeniami symetrycznemi wszystkich pierwiastków.

Przypatrzywszy się wartościom rzeczonych współczynników, zaraz dostrzeżemy że znaki ich idą naprzemian $+$ i $-$, a gdybyśmy wykonali podobne jak wyżej mnożenie, w równaniu tegoż tu §fu gdzie uważaliśmy pierwiastki $x_1, x_2, x_3 \ldots$ za odjemne, tedy, ponieważ w pojedynczych czynnikach pierwiastkowych same są tylko znaki $+$ znajdujące, nie masz powodu aby się z tego mnożenia otrzymało choćby jeden wyraz odjemny ale wszystkie dodatne. Napisawszy więc te dwa równania pod sobą tak jak wypadają z rozmnożenia czynników pierwiastkowych będzie

$$f(x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}-a_{n-3}x^{n-3}+\ldots-\ldots\pm a_3x^3\mp a_2x^2\pm a_1x\mp a_0$$
$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots+\ldots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Ale drugie z tych równań ma wszystkie pierwiastki, jak się rzekło, odjemne, a zatem przeciwne pierwiastkom równania pierwszego, które są wszystkie dodatnie. Te równania we wszystkiem są zupełnie te same wyjąwszy znaki wyrazów drugiego, czwartego, szóstego i t. d. t. j. każdego zajmującego w uporządkowanym wielomianie parzyste miejsce, które w pierwszem są odjemne, w drugiem zaś równaniu dodatnie.

Z tego przeto dostrzeżenia wnosimy łatwo, że chcąc równanie $f(x)=0$ przerobić na inne, któregoby pierwiastki miały znaki przeciwne pierwiastków pierwszego, dosyć jest przemienić znaki wyrazów tegoż równania stojących na miejscach parzystych, na przeciwne. Ale ponieważ współczynnikami $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3} \dots a_2, a_1, a_0$ mogą niektóre, a nawet wszystkie, wyjąwszy ostatni a_0 być równe zero i tym sposobem brakować może jednego, dwóch lub więcej wyrazów, zachowując przeto dostrzeżone prawidło przemiany znaków na przeciwne, pamiętać należy ciągle w porządku i brakujące wyrazy.

Powyższe prawidło można i tak naocznie pokazać. W równaniu

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+a_{n-4}x^{n-4}+a_{n-5}x^{n-5}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

współczynniki mogą mieć rozmaite znaki i niektóre z nich być zero; F To jednak wiemy, że liczba nieznana x jest wyobrazicielem każdego pierwiastka, kiedy kładąc $-x$ za x każdy pierwiastek pierwszego równania zmienić musi swój znak na przeciwny. Jeżeli powyższe równanie jest stopnia parzystego t. j. jeżeli wykładnik n jest liczbą parzystą, $n-1$, $n-3$, $n-5 \dots$ będą liczbami nieparzystemi. Ale tylko nieparzyste potęgi ilości odjemnej są odjemnemi a parzyste dodatnemi, zatem tylko wyrazy mające potęgi $x^{n-1}, x^{n-3}, x^{n-5} \dots x^3, x^1$ t. j. właśnie wyrazy stojące na miejscach parzystych, odmienią swoje znaki. Robiąc rzeczoną przemianę znaków znajdziemy

$$f(-x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}-a_{n-3}x^{n-3}+a_{n-4}x^{n-4}-a_{n-5}x^{n-5}+\dots+a_2x^2-a_1x+a_0=0$$

W przypadku zaś że n jest liczbą nieparzystą, za położeniem $-x$ za x będą potęgi $n, n-2, n-4, n-6 \dots$ nieparzyste a zatem odjemne, będzie przeto

$$f(-x)=-x^n+a_{n-1}x^{n-1}-a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}-a_{n-4}x^{n-4}+\dots-a_3x^3+a_2x^2-a_1x+a_0=0$$

albo

$$f(-x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}-a_{n-3}x^{n-3}+a_{n-4}x^{n-4}-a_{n-5}x^{n-5}+\dots+a_1x-a_0=0$$

// W ostatniem równaniu tak jak i w przypadku n parzystego, tylko wyrazy zajmujące parzyste miejsca znaki swe zmieniły.

Ponieważ wyżej widzieliśmy że ostatni wyraz równania $f(x)=0$ t. j. wyraz a_0 jest iloczynem ze wszystkich pierwiastków, ten zaś wyraz, w przypadku n parzystego jest dodatnim a w przypadku n nieparzystego jest odjemnym, wnieśmy przeto ogólnie że w każdem (do zera sprowadzonem) równaniu ostatni jego wyraz jest iloczynem ze wszystkich jego pierwiastków, ze znakiem przeciwnym F jeżeli stopień równania jest parzysty, a ze znakiem F jeżeli nieparzysty.

(Z tych też współczynników wypada łatwo mogący być dostrzeżonym wniosek, że gdyby w równaniu $f(x)=0$ ostatni wyraz a_0 był zero, natenczas jeden z pierwiastków koniecznie musi być zero. Podobnież, gdyby w temże równaniu brakowało wyrazu drugiego, t. j. wyrazu mającego potęgę ilości nieznanej o 1 niższą niż w wyrazie pierwszym, wtedy z pewnością twierdzić możemy że suma pierwiastków dodatnych równa się sumie odjemnych. Nareszcie, ponieważ, jak się już wspomniało, rzeczone współczynniki są funkcyjami symetrycznemi pierwiastków, zatem nie znając nawet tychże pierwiastków, obrachować można z samych współczynników każdą funkcyję symetryczną pierwiastków równania.

F pierwiastki też jego mogą być częścią dodatne a częścią odjemne lecz nam ich wcale nie znane

// bo wolno jest przemienić znaki w całem równaniu na przeciwne, gdyż to wychodzi na to jak rozmnożyć całe równanie przez -1, co jak wiadomo także wolno.

F uporządkowanem

F takim z jakim rzeczony iloczyn wypadnie,

~~§6. Przypominawszy że ktadąc w wielomianie zrównania $f(x)=0$ za x największy współczynnik, jaki się w tymże wielomianie znajduje, powiększony o 1 w każdym razie pierwszy wyraz x^n przewyższy sumę wszystkich innych wyrazów, co się bardzo łatwo dowodzi, przytaczam dwa następne twierdzenia potrzebne często przy rozwiązywaniu zrównań.~~

~~a) Każde zrównanie~~

§6. Bardzo często jest użycia w rozwiązywaniu zrównań przerobienie zrównania $f(x)=0$ na inne, którego by pierwiastki były o jakąkolwiek ilość np. h, większe lub mniejsze. Dla ważności tego przerobienia, nieco obszerniej o niem pomówię. Skoro x jest wyobrażnikiem każdego z pierwiastków zrównania $f(x)=0$, a żądanym zrównania którego by każdy pierwiastek był o h większym, toć wyobrażnikiem każdego z tych ostatnich pierwiastków będzie $x+h$, zatem cała rzecz chodzi o położenie w zrównaniu $f(x)=0$ zamiast x, $x+h$. Nowe przeto zrównanie oznaczymy krótko

$$f(x+h)=0=(x+h)^n+a_{n-1}(x+h)^{n-1}+a_{n-2}(x+h)^{n-2}+\ldots\ldots+a_2(x+h)^2+a_1(x+h)+a_0=0$$

Rozwinąwszy naznaczone potęgi i położywszy te rozwinięcia w zrównaniu w miejsce naznaczonych, a potem porządkując wyrazy według potęg rosnących ilości h, ponieważ we współczynnikach mnożących różne potęgi ilości h znajdować się będzie pierwotna nieznana x, także w różnych potęgach, więc jest bardzo stósownem oznaczyć też współczynniki przez $f(x)$. Że zaś będą różne, przeto je bardzo łatwo rozróżnimy dając głosce f, ~~wy~~ oznaczającej wyraz ~~funkcyja~~, liczby 1, 2, 3, … n nazywane zwykle skazówkami. Po uskutecznieniu, jak się powiedziało wyrazów podług potęg rosnących ilości h, zaraz dostrzeżemy, że współczynnik mnożący h^0 jest zupełnie tożsamo co $f(x)$; oznaczymy go też przez tenże sam wielomian. Następny współczynnik t. j. mnożący potęgę h^1 jest różnym od pierwszego, a dlatego dla różnicy od tamtego, oznaczymy go przez $f_1(x)$. Współczynnik potęgi h^2 oznaczymy przez $f_2(x)$ i t. d. w ogólności współczynnik potęgi h^n oznaczymy przez $f_n(x)$. Po tej ugodzie przerobione zrównanie pokaże się pod następującą postacią

$$f(x+h)=f(x)+hf_1(x)+h^2f_2(x)+h^3f_3(x)+\ldots+h^{n-1}f_{n-1}(x)+h^nf_n(x)$$

w którem

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$f_1(x)=nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+\ldots+4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x+a_1$$

$$f_2(x)=\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a_{n-1}x^{n-3}+\ldots\frac{3.4}{1.2}a_4x^2+\frac{2.3}{1.2}a_3x+\frac{1.2}{1.2}a_2$$

$$f_3(x)=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}a_{n-1}x^{n-4}+\ldots+\frac{2.3.4}{1.2.3}a_4x+\frac{1.2.3}{1.2.3}a_3$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$f_{n-1}(x)=\frac{n(n-1)(n-2)(\ldots\ldots3.2}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}x+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(\ldots).3.2.1}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}a_{n-1}$$

$$f_n(x)=\frac{n(n-1)(n-2)(\ldots\ldots).3.2.1}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)n}=1$$

Zwrócić tu muszę uwagę, że gdyby pierwszy wyraz w $f(x)$ nie był x^n ale a_nx^n, natenczas w każdym następnym wielomianie pierwszy wyraz byłby mnożonym przez a_n a następnie ostatni nie wypadłby $=1$ ale $=a_n$. Powtóre, gdyby się wzięło h odjemnie, coby znaczyło przerobienie zrównania $f(x)=0$ na inne $f(x-h)=0$ któregoby pierwiastki były mniejsze od pierwiastków pierwszego, wtedy tylko wyrazy mające potęgi nieparzyste ilości h byłyby odjemne.

Z tego przerobienia wypływa zasadnicze twierdzenie rozwiązania każdego zrównania następujące: wielomian do zera sprowadzonego i uporządkowanego zrównania jest ~~ilości~~ funkcyją ciągłą ilości nieznanej. Nim to twierdzenie dowiodę, muszę objaśnić choć w kilku słowach, co rozumieć należy przez funkcyję ciągłą.

Weźmiewszy najprostsze wyrażenie $3+x$ które też krótko napisać można $f(x)=3+x$, skoro za x kłaść będziemy wszystkie pomyśleć się mogące ważności tak w kierunku od 0 do $+\infty$ jako też w kierunku

od 0 do $-\infty$, a zatem wszelkie wartości w granicach od $-\infty$ do $+\infty$, w…
źności tego dwumianu wypadać także będą począwszy od 3, gdy się po…
ży $x=0$, coraz większe i coraz mniejsze, pierwsze gdy się postępować b…
dzie do granicy $+\infty$, a drugie do granicy $-\infty$. Z powodu iż się w tych
wartościach żadnego dopatrzyć nie można przeskoku, żadnej przerwy,
porównywszy naówczas od linij krzywych wszędzie nieprzerwanych, na…
zwano taką funkcyą ciągłą. Otóż powyższe twierdzenie mówi …
wielomian $f(x)$ jest funkcyą ciągłą, [dla wszystkich wartości x w granicach od $-\infty$ do $+\infty$.] Aby to dowieść napiszmy ost…
tnie zrównanie tak

$$f(x+h)-f(x) = h(f_1(x)+hf_2(x)+h^2f_3(x)+h^3f_4(x)+\ldots\ldots+h^{n-1}f_n(x))$$

Z tego zrównania widzimy że powiększywszy lub zmniejszywszy w zrównaniu
$f(x)=0$ nieznaną, albo jak ogólniej tę ilość nazywają, zmienną x o jakąkolwie…
ilość h, $f(x)$ zmieni się o $h(f_1(x)+hf_2(x)+h^2f_3(x)+\ldots\ldots)$. Przypuściwszy że
ilość h jest bardzo mała, albo jak zwyczajnie mówimy, nieskończenie mała,
wyrazy w nawiasie po drugiej stronie zrównania t. j. wyrazy $hf_2(x)$, $h^2f_3(x)$,
$h^3f_4(x)$ i t. d. będą także nieskończenie małe i to tak że każdy następny jest
mniejszym od poprzedzającego. Dla tej ich nadzwyczajnej małości, przyczy…
niają one się całkiem nieznacznie do powiększenia ilości $f_1(x)$ i to tak że
je bez dostrzegalnego namysłu opuścić można, skąd że nieskończenie ma…
to tym sposobem wypadłowi. Zrobiwszy zaś to, otrzymamy
$f(x+h)-f(x) = hf_1(x)$. Lecz kiedy h przyjęliśmy za przyrostek nieskoń…
czenie mały, więc i iloczyn $hf_1(x)$ jest także nieskończenie małym,
t. j. jeżeli w zrównaniu $f(x)=0$ powiększymy lub zmniejszymy x o …
h nieskończenie małą, funkcya także $f(x+h)$ powiększy się lub zmniejszy
również o nieskończenie małą ilość, bo jak widzimy różnica $f(x+h)-f(x)$
takąż jest ilością. Nadając przeto ilości h wszelkie wartości w granicach
$-\infty$ i $+\infty$, różnica $f(x+h)-f(x)$ wyrażona przez $hf_1(x)$ przybierać będzie
wszelkie wartości począwszy od $f(x)$ w obu kierunkach, żadnej nie prze…
skakując czyli nigdzie ciągu wartości nie przerywając, jest więc według
powyższego objaśnienia, ~~xxxx~~ funkcyą ciągłą.

§ 7. Jeżeli nam chodzi o otrzymanie zrównania którego by pierwiastki były o h wię…
ksze niż pierwiastki pierwotnego, tedy w wypadkowem zrównaniu nieznana
x pozostać musi a tylko współczynniki z powodu ilości h zmienią się. Aby
w takim razie otrzymać to zrównanie, dosyć w zrównaniu poprzedzającego
§fu zamienić wszędzie x na h a h na x, skutkiem otrzymamy

$$f(x+h) = f(h)+f_1(h)x+f_2(h)x^2+f_3(h)x^3+\ldots\ldots+f_{n-1}(h)x^{n-1}+f_n(h)x^n$$

w którem

$$f(h) = h^n+a_{n-1}h^{n-1}+a_{n-2}h^{n-2}+a_{n-3}h^{n-3}+\ldots\ldots+a_4h^4+a_3h^3+a_2h^2+a_1h+a_0$$

$$f_1(h) = nh^{n-1}+(n-1)a_{n-1}h^{n-2}+(n-2)a_{n-2}h^{n-3}+\ldots\ldots+4a_4h^3+3a_3h^2+2a_2h+a_1$$

$$f_2(h) = \frac{n(n-1)}{1.2}h^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a_{n-1}h^{n-3}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}a_{n-2}h^{n-4}+\ldots+\frac{3.4}{1.2}a_4h^2+\frac{2.3}{1.2}a_3h+\frac{1.2}{1.2}a_2$$

$$f_3(h) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}h^{n-3}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}a_{n-1}h^{n-4}+\ldots\ldots+\frac{2.3.4}{1.2.3}a_4h+\frac{1.2.3}{1.2.3}a_3$$

$$f_4(h) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}h^{n-4}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4}a_{n-1}h^{n-5}+\ldots+\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4}a_4$$

. . . .

$$f_{n-1}(h) = \frac{n(n-1)(n-2)(\ldots).3.2}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}h+\frac{(n-1)(n-2)(\ldots\ldots).3.2.1}{1.2\ldots\ldots(n-1)}a_{n-1}$$

$$f_n(h) = \frac{n(n-1)(n-2)(\ldots\ldots).3.2.1}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)n} = 1 \text{ lub } = a_n \text{ według dawniejszej uwagi}$$

Te współczynniki różnych potęg przerobionego zrównania mającego pierwiast…
ki o h większe od pierwiastków zrównania $f(x)=0$ tak dla składu swego jako też
~~dla~~ i częstego swego użytku, zasługują na nieco bliższe rozpatrzenie. Zastanowi…
wszy się nad niemi, zaraz bez trudności widzimy że współczynnik zmożony
potęgą x^0, która tu jest na pierwszem miejscu, bo wielomian teraźniejszego
zrównania $f(x+h)=0$ jest uporządkowany według rosnących potęg ilości x,
t. j. współczynnik $f(h)$, jest wielomianem zrównania $f(x)=0$, skoro w nim
położymy h zamiast x.

Współczynnik $f_1(h)$, t. j. współczynnik mnożący potęgę x^1, wyprowadza się ze współczynnika $f(h)$ w ten sposób, że się mnoży każdy wyraz przez wykładnika ilości h w nim się znajdującej i potem zmniejsza się tenże wykładnik o 1.

Współczynnik mnożący potęgę x^2, t. j. współczynnik $f_2(h)$ wyprowadza się z poprzedzającego $f_1(h)$ tymże samym sposobem jakim on z $f(h)$ wyprowadzonym został i oprócz tego dzieli się każdy jego wyraz przez 2.

Współczynnik $f_3(h)$ wyprowadza się znowu z $f_2(h)$ zupełnie tymże samym sposobem, jakim ten ostatni powstał z $f_1(h)$, a do tego dzieli się każdy jego wyraz przez 3.

Wyrazy współczynnika $f_4(h)$ wyprowadzonego z $f_3(h)$ według tegoż samego prawidła, podzielić potrzeba przez 4, i tak o następnych aż do współczynnika $f_n(h)$. To samo zupełnie rozumieć należy o wielomianach $f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$, i t. d. $f_{n-1}(x), f_n(x)$.

To tak prawidłowe powstawanie każdego następnego z poprzedzającego współczynnika czyli wielomianu, nadało im nazwę wielomianów pochodnych, mianowicie $f(h)$ nazywa się wielomianem pierwotnym; $f_1(h)$ pochodnym pierwszym; $f_2(h)$ pochodnym drugim względem $f(h)$, a pierwszym względem $f_1(h)$; $f_3(h)$ pochodnym trzecim względem $f(h)$, drugim względem $f_1(h)$ a pierwszym względem $f_2(h)$ i tak o następnych. Wielomiany też $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ i t. d. są pochodnemi wielomianu $f(x)$; jak to, wnie wszystkie podobnym sposobem z pławne(?) go pierwotnego wyprowadzone.

Lubo te wielomiany pochodne ułatwiają nam sposób obrachowania współczynników zrównania przerobionego, to przecież i tak czekałaby nas dość mozolna praca, szczególniej gdyby pierwotne zrównanie $f(x)=0$ było wyższego niż trzeci lub czwarty stopnia, dlatego w dalszym ciągu podam praktyczny sposób wielce ułatwiający ten rachunek.

Aby jednak ustrzydz się nie wprowadzić w błędne rozumienie tego przerobienia, zastanówmy się jeszcze nad zrównaniami $f(x)=0$ i $f(x+h)=0$. Wyobrażnikiem każdego pierwiastku zrównania $f(x)=0$ jest x, wyobrażnikiem zaś pierwiastków zrównania przerobionego $f(x+h)=0$ jest, jak w § 6 powiedziałem, $x+h$. Ale w wypadkowem zrównaniu $f(x+h)=0$ wyobrażnik pierwiastków x pozostał, a przyrostek h jako liczba weszła w skład współczynników. Ponieważ zaś x w zrównaniu $f(x+h)=0$, ma koniecznie inne ważności, inne pierwiastki niż w zrównaniu $f(x)=0$, jakież są te pierwiastki i co tu x znaczyć będzie? Najłatwiej na to pytanie odpowiemy rozróżniając między sobą pierwiastki (albo raczej wyobrażniki pierwiastków) tych dwóch zrównań. Oznaczyjmy więc przez x wyobrażnika pierwiastków zrównania $f(x)=0$, wyobrażnika pierwiastków zrównania $f(x+h)=0$ oznaczmy przez x'; tedy według tego co się powiedziało w powołanym wyżej §fie jest $x'=x+h$, skąd $x=x'-h$. Z tego jasno czytamy, że skoro w zrównaniu $f(x+h)=0$ x pozostało wyobrażnikiem każdego jego pierwiastka, zmiana zaś jaką sprawiło umieszczenie się liczby h we współczynnikach, powoduje także zmianę w jego pierwiastkach, mianowicie że każdy tego ostatniego zrównania jest mniejszy o h od odpowiedniego pierwiastka zrównania $f(x)=0$. Z tego wnieśiemy, że kładąc w zrównaniu $f(x)=0$, $x+h$ za x, otrzymujemy nowe zrównanie którego pierwiastki są mniejsze o h od pierwiastków tegoż zrównania. Gdybyśmy zaś położyli $x-h$ za x, nowego zrównania pierwiastki będą większe o h od pierwiastków zrównania $f(x)=0$ co znowu ze zrównania $x'=x-h$, skąd $x=x'+h$ bardzo łatwo wyczytać można. Chcąc przeto otrzymać współczynniki zrównania

którego by pierwiastki były mniejsze o h niż danego, potrzeba w $f(h)$, $f_1(h)$, $f_2(h)$ i t. d. położyć za h; dla otrzymania zaś współczynników równania którego by pierwiastki były większe o h, położyć potrzeba $-h$.
Dla objaśnienia tego weźmy tylko jeden przykład.
Niech będzie danem równanie

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 39x^2 - 62x + 50 = 0$$

Równanie którego pierwiastki są o 2 mniejsze będzie

$$f(x+2) = f(2) + f_1(2)x + f_2(2)x^2 + f_3(2)x^3 + f_4(2)x^4$$

gdzie

$$f(2) = 2^4 - 8.2^3 + 39.2^2 - 62.2 + 50 = +34$$
$$f_1(2) = 4.2^3 - 24.2^2 + 78.2 - 62 = \text{---} +30$$
$$f_2(2) = 6.2^2 - 24.2 + 39 = \text{------} +15$$
$$f_3(2) = 4.2 - 8 = \text{--------} 0$$
$$f_4(2) = 1 \text{------------} 1$$

Równanie więc którego pierwiastki są o 2 mniejsze będzie

$$f(x+2) = x^4 + 15x^2 + 30x + 34 = 0$$

Równanie zaś któregoby pierwiastki były większe o 2 od pierwiastków danego równania tąż samą drogą wypadnie

$$f(x-2) = x^4 - 16x^3 + 111x^2 - 346x + 410 = 0$$

Że się też same otrzyma współczynniki kładąc w $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ i t. d. 2 za x, jest jasnem.

§ 8. Wspomniałem wyżej że podam praktyczny sposób ułatwiający obrachowanie współczynników równania przerobionego, który też posłuży w każdym przypadku gdy chcemy znaleźć wypadek z podstawienia za x w równaniu $f(x)=0$ jakiej kolwiek liczby. Ten sposób wypadł wprost z napisania równania $f(x)=0$ następnie: weźmy n. p. za przykład powyższe równanie $f(x) = x^4 - 8x^3 + 39x^2 - 62x + 50$, które napiszemy

$$f(x) = \{((1.x - 8)x + 39)x - 62\}x + 50 \text{ F}$$

Chcąc teraz położyć za x liczbę 2 i znaleźć wypadek z tego podstawienia, wykonamy cały ciąg rachunku a to bez żadnego podnoszenia do potęgi. Napisać bowiem współczynnik najwyższej potęgi który tu jest 1 mnoży się przez x, a w tym razie przez 2, skąd otrzyma się 2, to dodaje się do następnego współczynnika -8, skąd wypadnie -6 i znowu się mnoży przez x czyli przez 2, z czego wypadnie -12, ten wypadek dodaje się do następnego współczynnika $+39$, skąd wypadnie $+27$, znowu się mnoży przez 2 i dodaje do współczynnika następnego -62 skąd się otrzyma $+2.27-62=-8$. Ten wypadek mnoży się znowu przez 2 i dodaje do współczynnika następnego, skąd wypadnie $-2.8+50=34$ a to jest wypadkiem z podstawienia 2 za x. Daleko się to łatwiej wykonywa urządzając rachunek następnie

$$
\begin{array}{lccccc}
 & 1 & -8 & +39 & -62 & +50 \\
2) & & 2.1=+2 & 2.-6=-12 & 2.27=+54 & 2.-8=-16 \\
\hline
 & 1 & -6 & +27 & -8 & +34
\end{array}
$$

współczynniki równania

Rozumie się że iloczyny stojące w drugiej linii jako też i dodawanie lub odejmowanie uskutecznia się w myśli tak że napisawszy z swemi znakami współczynniki danego równania, pisze się tylko liczby ostatniej linii i cały rachunek następnie wygląda

$$
\begin{array}{lccccc}
2) & 1 & -8 & +39 & -62 & +50 \\
 & 1 & -6 & +27 & -8 & +34
\end{array}
$$

wypadek z podstawienia

F Kładąc za x -2) ta tylko będzie zmiana że wszędzie mnożyć się będzie przez -2. I tak, chcąc mieć wypadek gdy się położy $x=-2$, rachunek będzie

$$
\begin{array}{lccccc}
 & 1 & -8 & +39 & -62 & +50 \\
-2) & 1 & -10 & +59 & -180 & +410
\end{array}
$$

wypadek

To postępowanie zrozumiawszy, zrozumie się łatwo rachowanie współczynników ~~xxxxxxx~~ wielomianu $f(x+h)$ F, bo jest zupełnie to samo wyżej wspo-

F Łatwo to obaczenie widzi się naocznie gdy w powyższym napisanem równaniu położymy wszędzie 2 zamiast x; wypadnie ono bowiem następnie
$f(2) = \{((1.2-8)2+39)2-62\}2+50$

że dla współczynnika $f_1(h)$, zatrzymuje się na przedostatnim wyrazie; dla współczynnika $f_2(h)$ na przed przedostatnim i t.d. Pamiętać jednak należy że gdyby współczynnik najwyższej potęgi był innym niż 1 takowy w miejscu 1 napisać należy i przez liczbę która się przedstawia mnożyć tak jak się z 1 postąpiło. Podobnież gdyby w równaniu $f(x)=0$ brakowało ~~brak~~ jednego lub więcej wyrazów, coby dowodziło że ich współczynniki są zero, wypisując w linii poziomej jak wyżej też współczynniki, miejsce lub miejsca brakujących zastąpić potrzeba zerami. Objaśniam oba przypadki przykładami.

W równaniu $f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 3x - 9 = 0$ ~~ch~~cemy wiedzieć jaki będzie wypadek gdy położymy $x=3$, a jaki dla $x=-3$?

dla $x=3$						dla $x=-3$				
5	−7	+8	+3	−9		5	−7	+8	+3	−9
5	+8	+32	+99	+288		5	−22	+74	−219	+648

t.j. $3.5-7=8$, $3.8+8=32$, $3.32+3=99$, $3.99-9=288$

t.j. $-3.5-7=-22$, $-3.-22+8=74$, $-3.74+3=-219$, $-3.-219-9=648$

Szukając wypadku z podstawienia $x=5$ w równaniu $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 - 3 = 0$ będzie:

współ. rów.	1	0	1	0	1	0	−3
5)	1	5~~5~~	26	130	651	3255	16272

~~Ponieważ [illegible]~~

t.j. $5.1+0=5$, $5.5+1=26$, $5.26+0=130$, $5.130+1=651$, $5.651+0=3255$ i nareszcie $5.3255-3=16272$ wypadek z podstawienia.

§ 9. Przejdźmy teraz do pierwszej uwagi. Weźmy równanie trzeciego stopnia $f(x) = x^3 - 5x - 7 = 0$ i szukajmy równania którego by pierwiastki były o 2 mniejsze niż pierwiastki danego. Szukane równanie będzie naturalnie także trzeciego stopnia, chodzi więc tylko o znalezienie jego współczynników. Dla ich znalezienia odbędziemy następujący rachunek

współczyn. równania	1	0	−5	−7
podstawienie =2	1	2	−1	−9
	1	4	+7	
	1	6		
	1			

więc liczby 1, 6, 7 i −9 są współczynnikami szukanego równania tak że 1 jest współczynnikiem trzeciej, 6 drugiej, 7 pierwszej a −9 potęgi zero, samo zaś równanie będzie $x^3 + 6x^2 + 7x - 9 = 0$ którego pierwiastki są o 2 mniejsze niż pierwiastki równania $x^3 - 5x - 7 = 0$

Podobnież, niech będzie równanie $x^7 - 2x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1 = 0$, szukajmy równania którego by pierwiastki były o 3 mniejsze niż pierwiastki danego, tedy

	1	0	−2	−1	+1	+2	+0	−1
3)	1	+3	+7	+20	+61	+185	+55~~5~~	+1664
	1	+6	+25	+95	+346	+1223	+4224	
	1	+9	+52	+251	+1099	+4520		
	1	+12	+88	+515	+2644			
	1	+15	+133	+914				
	1	+18	+187					
	1	+21						
	1							

a szukane równanie będzie ~~$x^7 + 18x^6 + 133x^5 + 515x^4 + 1099x^3$~~

$$x^7 + 21x^6 + 187x^5 + 914x^4 + 2644x^3 + 4520x^2 + 4224x + 1664 = 0$$

Ten rachunek niezmiernie jest łatwym i jedynie tylko przytomności wymaga w działaniach. Gdyby w tym rachunku zaraz w pierwszej linii ostatni wyraz wypadł zero, byłoby to według § 3 dowodem że podstawiana liczba t.j. liczba o którą chcemy zmniejszyć pierwiastki jest pierwiastkiem równania danego. Gdyby i w drugiej linii ostatnia liczba wypadła zero, wnieślibyśmy z tego samym sposobem, że liczba o którą zmniejszamy jest 2 razy t.j. pierwiastkiem podwójnym tegoż równania i t.d.

(Zmniejszając pierwiastki) równania $x^3+x^2-14x-24=0$ ~~razy~~ o 4, mamy

	1	+1	−14	−24
4)	1	+5	+6	0
	1	+9	+42	
	1	+13		
	1			

Szukane równanie jest $x^3+13x^2+42x+0. = x^3+13x^2+42x = x^2+13x+42=0$
Ponieważ tu ostatni wyraz wypadł zero, więc liczba 4 jest pierwiastkiem danego równania, co też pokazuje i wypadkowe równanie które przez podzielenie przez x sprowadziliśmy do równania drugiego stopnia dającego dwa inne pierwiastki równania danego ale każdy mniejszy o 4. Rozwiązawszy toż równanie według wiadomego sposobu, znajdziemy dwa jego pierwiastki -6 i -7. Ponieważ każdy z nich jest mniejszym o 4 niż odpowiadające pierwiastki równania danego, więc dwa inne pierwiastki danego równania są $-6+4=-2$ i $-7+4=-3$. Że te liczby są rzeczywiście pierwiastkami równania $x^3+x^2-14x-24=0$ przekonamy się podstawiając takowe za x

−2)	1	+1	−14	−24	−3)	1	+1	−14	−24
	1	−1	−12	0		1	−2	−8	0

Ponieważ z obu podstawień otrzymujemy wypadki zero, zatem prawdą jest że -2 i -3 są pierwiastkami rzeczonego równania. Jak widzimy można na drodze podstawiania odkryć same pierwiastki równania. Tak założone równanie $x^3+x^2-14x-24=0$ ma trzy pierwiastki, $x_1=-2$, $x_2=-3$, $x_3=4$. Czynnikami pierwiastkowemi tego równania są $x+2$, $x+3$ i $x-4$ tak że $x^3+x^2-14x-24=(x+2)(x+3)(x-4)$. Że zaś nie masz żadnych innych ważności któreby położone za x dały wypadek zero, to już wiemy bo dane równanie jako trzeciego stopnia ma tylko trzy pierwiastki ani może mieć ich więcej.

Z powodu ważności przerobienia danego równania na inne któregoby pierwiastki były o pewną ilość mniejsze lub większe od pierwiastków podanego równania, zatrzymam się jeszcze nieco nad tem przerobieniem podając jeszcze przykłady.

(Dane równanie $x^4-15x^2+10x+24=0$ przerobię na inne któregoby pierwiastki były mniejszemi o 5 od pierwiastków danego. Szukające rozpoczynników będzie

	1	0	−15	+10	+24
5)	1	+5	+10	+60	+324
	1	+10	+60	+360	
	1	+15	+135		
	1	+20			
	1				

Żądane przeto równanie jest $x^4+20x^3+135x^2+360x+324=0$
(Danego równania czterema pierwiastkami są liczby $-1, -4, +2, +3$ pierwiastki zatem ostatniego będą $-1-5=-6$, $-4-5=-9$, $+2-5=-3$, i $+3-5=-2$ o czem się łatwo przekonać podstawiając tak pierwsze w danem, jako też i drugie liczby w otrzymanem równaniu.

Znaleźć równanie któregoby pierwiastki były mniejszemi o 2 niż pierwiastki równania $500x^5-4885x^3+402x^2+2135x+372=0$

2)	500	0	−4885	+402	+2135	+372
	500	+1000	−2885	−5368	−8601	−16830
	500	+2000	+1115	−3138	−14877	
	500	+3000	+7115	+11092		
	500	+4000	+15115			
	500	+5000				
	500					

$500x^5+5000x^4+15115x^3+11092x^2-14877x-16830=0$

równanie szukane.

Gdybyśmy chcieli znaleźć równanie którego pierwiastki mniejsze są o 0·5 niż pierwiastki równania $x^3-7x+7=0$, postąpilibyśmy następnie

```
0·5 | 1     0       −7        +7
    |       0·5     +0·25     −3·375
    | 1     0·5     −6·75     +3·625
    |       0·5     +0·5
    | 1     1·0     −6·25
    |       0·5
    | 1     1·5
    | 1
```

Szukane zatem równanie jest $x^3+1·5x^2-6·25x+3·625=0$

Szukajmy teraz równania którego pierwiastki są mniejsze o 1·692 niż pierwiastki tegoż samego co wyżej równania. Zawsze tą samą drogą postępując będzie

```
1·692 | 1     0         −7              +7
      |       +1·692    +1·692          −4·137136
      | 1     +1·692     1·0152          2·4822816
      |       +1·692      15228           37234224
      | 1     +3·384       3384             8274272
      |       +1·692    −4·137136       −0·000034112
      | 1     +5·076    +3·384
      |                  2·0304
      |                   30456
      |                    6768
      | 1               +1·588592
```

i żądane przeto równanie jest $x^3+5·076x^2+1·588592x-0·000034112=0$

Toż samo przerobienie łatwiej się wykonywa zmniejszając najprzód pierwiastki o 1, potem pierwiastki wypadkowego równania o 0·6, następnie pierwiastki tego drugiego wypadkowego równania o 0·09 a nareszcie pierwiastki ostatniego równania o 0·002. Rachunek ten chociażby się zdawał nieco dłuższym niż poprzedzający, wszelako łatwiej się w nim ustrzec błędu i oprócz tego, posłuży nam w dalszym ciągu jako sposób znalezienia pierwiastków równania danego, czyli do jego rozwiązania. Zobaczmy ten rachunek. Zmniejszając pierwiastki równania o 1 będzie

```
1 | 1    0     −7    +7
  | 1   +1     −6    +1
  | 1   +2     −4
  | 1   +3
```

a wypadkowe równanie $x^3+3x^2-4x+1=0$

Tego zaś równania zmniejszając pierwiastki o 0·6, będzie

```
0·6 | 1    +3       −4       +1
    |      +0·6     +2·16    −1·104
    | 1    +3·6     −1·84    −0·104
    |      +0·6     +2·52
    | 1    +4·2     +0·68
    |      +0·6
    | 1    +4·8
```

więc równanie którego pierwiastki są mniejsze o 0·6 niż poprzedzającego, a o 1·6 mniejsze niż równania danego, jest

$$x^3+4·8x^2+0·68x-0·104=0$$

Tego zaś znowu równania zmniejszając pierwiastki o 0·09 będzie

```
0·09 | 1    +4·8      +0·68       −0·104
     |      +0·09     +0·4401     +0·100809
     | 1    +4·89     +1·1201     −0·003191
     |      +0·09     +  4482
     | 1    +4·98     +1·5683
     |      +0·09
     | 1    +5·07
```

zaś równanie którego pierwiastki mniejsze są od poprzedzającego o 0·09 a mniejsze o 1·69 od pierwiastków równania danego jest

$$x^3+5·07x^2+1·5683x-0·003191=0$$

Nareszcie zmniejszając pierwiastki tego to ostatniego równania o 0·002, będzie

```
0·002 | 1    +5·07      +1·5683       −0·003191
      |      +0·002     +  10144      +0·003156888
      |      +5·072     +1·578444     −0·000034112
      |      +   2      +  10148
      |      +5·074     +1·588592
      |          2
      |      +5·076
```

Ostatecznie więc równanie którego pierwiastki są mniejsze o 1'692 niż pierwiastki równania $x^3-7x+7=0$, jest

$$x^3+5'076x^2+1'588592x-0'000034112=0$$

zupełnie takie same, jak pierwszym sposobem.

Całe to postępowanie skraca się tak że czyni niepotrzebnem osobne wypisywanie współczynników każdego następnego równania, jako też pisania niepotrzebnych z lewej stronyczes a naszpie dla wprawnego w rachunek niepotrzebne są także iloczyny, bo je zaraz z pamięci można dodawać lub odejmować.ˣ Krótszy w rachunek zamienia się na jeden ciąg samych potrzebnych cyfer, a w iloczynach zawsze wiemy w którem miejscu jaka cyfra wypada. Zobaczmy jeszcze i ten rachunek piszę jednak i iloczyny dla tem większej pewności

Zmniejszamy pierwiastki równania $x^3-7x+7=0$ o 1'692

1 0	−7	+7
+1	+1	−7'6
2'6	−6	+1
3'6	+2	−1'104
4'2	−4	−0'104
4'89	+2'16	+0'100'09
4'98	−1'84	−0'003191
5'072	+2'52	+ 3136888
5'074	+0'68	−0'000034112
5'076	4401	
	+1'1201	
	4482	
	+1'5683	
	10144	
	+1'578444	
	10148	
	+1'588592	

Ostatnie wyrazy każdej kolumny są współczynnikami szukanego równania.

Zmniejszywszy pierwiastki danego równania o 1'692, otrzymaliśmy ostatni wyraz równania −0'000034112 t.j. nie wiele różny od zero; kiedy zaś, jak to widzieliśmy, liczba o którą zmniejszamy pierwiastki czyni ten ostatni wyraz równym zero, jest pierwiastkiem równania którego pierwiastki zmniejszamy, wniesiemy zatem że liczba 1'692, nie wiele się także różni od prawdziwego pierwiastka

Tu już łatwo każdy wniesie że gdybyśmy mogli znaleść taką liczbę która w powyższy sposób podstawiona czyli o którą pierwiastki danego równania zmniejszone, przywiodłaby ostatni wyraz równania do zera, to taż liczba byłaby pierwiastkiem. Że takiej liczby od razu znaleść niemożna, bo to znaczy rozwiązać równanie, dlaczegoby powyższa robota była nie potrzebną, każdy to pojmuje; że jednak znaleść można tęż liczbę częściowo t.j. cyfra za cyfrą, o tem się później przekona gdy mówić będziemy o rozwiązaniu równań opartem na wytoczeniu i przerobieniu równań.

§10. W §4 dowiedziało się że wielomian równania jest bez reszty podzielny przez czynnik pierwiastkowy. Ponieważ przez takowe dzielenie wielomian zniża się o jeden stopień i daje nam sposobność z takim zniżonem równaniem postąpić znowu tak jak z pierwotnem dla znalezienia drugiego pierwiastka, dlatego też nie zbadać w praktyce bywa używanym. Otóż powiadam, że to dzielenie wykonać można tą samą drogą podstawienia jaką w §8 poznaliśmy. Zobaczmy czyli to prawda. W §9 znaleźliśmy że 4 jest pierwiastkiem równania $x^3+x^2-14x-24=0$ przeto przez dzielenie będzie

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2-14x-24 & x-4 \\ \underline{-x^3+4x^2} & x^2+5x+6 \\ \quad +5x^2 & \\ \quad \underline{-5x^2+20x} & \\ \qquad\quad +6x-24 & \\ \qquad\quad \underline{-6x+24} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Sposobem podstawienia będzie

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & +1 & -14 & -24 \\ 4) & 1 & +5 & +6 & 0 \end{array}$$

Liczby 1, 5, 6 są współczynnikami ilorazu o jeden stopień niższego będzie on więc x^2+5x+6 jak wyżej

† ~~Tego~~ Przerobienia, o którém tu tak obszernie mówiliśmy, używa się często w celu pozbycia się ze zrównania $f(x)=0$ wyrazu drugiego, t. j. wyrazu mającego potęgę nieznanej ilości o 1 niższą niż potęga najwyższa; co w rozwiązywaniu zrównań w wielu przypadkach jest korzystném. Aby ten wyraz zniknął, dosyć jest aby jego współczynnik stał się $=0$. Ale ten współczynnik, jak wyżej widzieliśmy jest

$$f_{n-1}(h)=\frac{n(n-1)(n-2)(\ldots\ldots).3.2}{1.2.3\ldots\ldots(n-2)(n-1)}h+\frac{(n-1)(n-2)(\ldots\ldots).3.2.1}{1.2\ldots\ldots(n-2)(n-1)}a_{n-1}=nh+a_{n-1}$$

Położmyż ten współczynnik $=0$, a będzie $nh+a_{n-1}=0$ zkąd $h=-\frac{a_{n-1}}{n}$. Jeżeliby zaś w zrównaniu $f(x)=0$, najwyższa potęga x^n miała współczynnik jaki a_n, wtedy powyższy współczynnik będzie $na_nh+a_{n-1}=0$ zkąd $h=-\frac{a_{n-1}}{na_{n}}$. Ponieważ tu ciągle uważamy $a_n=1$, zatem tylko pierwszą wartość $h=-\frac{a_{n-1}}{n}$ zatrzymamy. Nadto wyżej mieliśmy wyobraźnika nowego zrównania $x'=x+h$ albo $x'=x-h$ zkąd $x=x'-h$ albo też $x=x'+h$. Położywszy tu znalezioną wartość na h pod warunkiem żeby drugi wyraz zniknął, będzie $x=x'+\frac{a_{n-1}}{n}$ tudzież $x=x'-\frac{a_{n-1}}{n}$. A że przerobienie ogólne na początku tego § wykonane uważało h jako dodatne, więc też do naszego teraźniejszego celu służy tylko zrównanie $x=x'-\frac{a_{n-1}}{n}$ z którego uczymy się, że aby ze zrównania $f(x)=0$ wyrzucić wyraz drugi trzeba do nieznanej tego nowego zrównania dodać z przeciwnym znakiem iloraz wypadający z podzielenia współczynnika tegoż wyrazu drugiego przez wykładnik najwyższy t. j. przez wykładnik ilości nieznanej w pierwszym wyrazie; to zaś wychodzi na to samo co znaleźć zrównanie któregoby pierwiastki były mniejsze niż

pierwiastki zrównania $f(x)=0$ o wspomniony iloraz.

W zrównaniu §7. $x^4-8x^3+39x^2-62x+50=0$ chcąc się pozbyć wyrazu $-8x^3$, według co dopiero wystawionego prawidła potrzeba położyć $x=x'-(-\frac{8}{4})=x'+2$, a zmniejszając pierwiastki pierwszego zrównania o 2, znaleźliśmy rzeczywiście współczynnik drugiego wyrazu $=0$ a wypadkowe zrównanie bez drugiego wyrazu $x^4+15x^2+30x+34=0$

Weźmy jeszcze zrównanie $x^5+4x^4+2x^3-4x^2+8x+16=0$

Chcąc się tu pozbyć wyrazu $4x^4$, ponieważ iloraz z przeciwnym znakiem wypada $-\frac{4}{5}=-0{\cdot}8$, więc wnieśmy że tu potrzeba przerobić to zrównanie na inne którego by pierwiastki były większe o 0·8 niż pierwiastki danego; zatem

−0·8	1	+4	+2	−4	+8	+16
	1	−0·8	−2·56	+0·448	+2·8416	−8·67328
		+3·2	−0·56	−3·552	+10·8416	+7·32672
		−0·8	−1·92	+1·984	+1·2544	
		+2·4	−2·48	−1·568	+12·0960	
		−0·8	−1·28	+3·008		
		+1·6	−3·76	+1·440		
		−0·8	−0·64			
		+0·8	−4·40			
		−0·8				
		0				

Żądane zrównanie bez drugiego wyrazu będzie

$$x^5-4{\cdot}4x^3+1{\cdot}44x^2+12{\cdot}096x+7{\cdot}32672=0$$

Więcej przytaczać przykładów nie widzę potrzeby.

Gdybyśmy podzielili wielomian tegoż zrównania przez $x-3$, ponieważ $+3$ nie jest pierwiastkiem wzmiankowanego zrównania, więc dzielenie to koniecznie musi jakąś resztę. Otóż na tej drodze znajdzie się także całkowity iloraz jakoteż i reszta. Jak działanie będzie

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2-14x-24 & x-3 \\ \hline -x^3+3x^2 & x^2+4x-2 \\ \quad +4x^2 & \\ \quad -4x^2+12x & \\ \qquad -2x-24 & \\ \qquad +2x-6 & \\ \qquad\quad -30 \text{ reszta} & \end{array}$$

Przez podstawienie 3 za x, jest

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & +1 & -14 & -24 \\ 3) & 1 & +4 & -2 & -30 \text{ reszta} \end{array}$$

Napisać przeto można $\dfrac{x^3+x^2-14x-24}{x-3} = x^2+4x-2-\dfrac{30}{x-3}$

Podzielmy też tym ostatnim sposobem x^3-7x+7 przez ~~$x-1{\cdot}692$~~ [illegible] $x-1{\cdot}692$,

$$\begin{array}{rrrrr} 1{\cdot}692) & 1 & 0 & -7 & +7 \\ & & 1{\cdot}692 & +2{\cdot}862864 & -7{\cdot}000034112 \\ \hline & 1 & 1{\cdot}692 & -4{\cdot}137136 & -0{\cdot}000034112 \end{array}$$

przeto $\dfrac{x^3-7x+7}{x-1{\cdot}692} = x^2+1{\cdot}692x-4{\cdot}137136-\dfrac{0{\cdot}000034112}{x-1{\cdot}692}$

W poprzedzającym §fie zrobiło się uwagę, z powodu ostatniego wyrazu $-0{\cdot}000034112$ przerobionego zrównania, że ponieważ tenże wyraz jest bliskim zera, zatem podstawiona liczba $1{\cdot}692$ jest także bliską prawdziwego pierwiastka. Ten sam ostatni wyraz jest też resztą wypadającą z dzielenia powyższego zrównania przez dwumian $x-1{\cdot}692$, zatem dzieląc $f(x)$ przez $x-\alpha$, gdy α nie jest pierwiastkiem zrównania $f(x)=0$, (często) osądzić będzie można (z wielkości) reszty, jak daleko jest liczba α od prawdziwego pierwiastka; bo ostatni wyraz i reszta z dzielenia nic innego nie jest, jak się przekonać można z §8, jak wypadek z podstawienia za x jakiej liczby.

Dzieląc wielomian $f(x)$ przez $x+\alpha$, znaczy to samo co podstawić ~~za~~ $-\alpha$ za x. Tak np. dzieląc wielomian zrównania $x^5-15x^4+85x^3-225x^2+274x-120=0$ przez $x+3$ będzie

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 1 & -15 & +85 & -225 & +274 & -120 \\ -3) & 1 & -18 & +139 & -642 & +2200 & -6720 \end{array}$$

jest przeto $\dfrac{x^5-15x^4+85x^3-225x^2+274x-120}{x+3} = x^4-18x^3+139x^2-642x+2200-\dfrac{6720}{x+3}$

Nawet w przypadku gdy α jest urojone np. postaci $p+q\sqrt{-1}$, użyć można tegoż samego sposobu podstawienia, zamiast ~~mnożenia~~ dzielenia. Jak zrównanie $f(x)=x^4-8x^3+39x^2-62x+50=0$ ma dwa pierwiastki urojone, bo takie pierwiastki zawsze w parze chodzą, jeden $=1+\sqrt{-1}$ a drugi, jak w każdym innym razie, różniący się od tego tylko znakiem części urojonej, $=1-\sqrt{-1}$; czynniki przeto pierwiastkowe będą $x-1-\sqrt{-1}$ i $x-1+\sqrt{-1}$. Podzieliwszy przez którykolwiek z tych czynników (np. przez pierwszy) wielomian danego zrównania, będzie

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} 1+\sqrt{-1}) & 1 & -8 & +39 & -62 & +50 \\ & & +1+\sqrt{-1} & -7-7\sqrt{-1} & +31-6\sqrt{-1} & -25+25\sqrt{-1} \\ \text{znajdziemy} & 1 & -7+\sqrt{-1} & -4+\sqrt{-1}\;\ldots & +6+31\sqrt{-1} & -25-25\sqrt{-1} \\ & & +1-\sqrt{-1} & +31-6\sqrt{-1} & -25+25\sqrt{-1} & 0 \\ 1-\sqrt{-1}) & 1 & -6 & -6+6\sqrt{-1} & +25-25\sqrt{-1} & \\ & & & +25 & 0 & \end{array}$$

Ponieważ pierwsze podstawienie przywiodło ostatni wyraz do zera, a potem w wypadku nowem zrównaniu którego ostatni wyraz jest $-25+25\sqrt{-1}$ podstawienie drugie przywodzi tenże wyraz znowu do zera, zatem tak pierwsze jak i drugie podstawienie są pierwiastkami tego zrównania; a dlatego będzie też zrównanie podzielnem bez reszty przez każdy z owych czynników pierwiastkowych, jest też podzielnem przez ich iloczyn t.j. przez $(x-1-\sqrt{-1})(x-1+\sqrt{-1})=x^2-2x+2$; z podzielenia zaś wypada

$\dfrac{f(x)}{x^2-2x+2}=x^2-6x+25$ jak wypadło z drugiego podstawienia wspłaczynnikami. Również zatem łatwo jest i prędzej dzielić przez każdy czynnik kwadratowy czyli trójmian, sposobem podstawienia wskazanym.

Tak jak w poprzedzającym przykładzie otrzymaliśmy na iloraz trójmian $x^2-6x+25$ z podzielenia $f(x)$ przez x^2-2x+2, dzieląc więc teraz sam wielomian $f(x)$ przez $x^2-6x+25$, otrzymać powinniśmy na iloraz trójmian pierwszy t. j. x^2-2x+2. Zobaczmy.

+6	1	−8	+39	−62	+50
		+6	6.−2=−12	6.+2=+12	6.0= 0
−25	1	~~+6~~	−25.1=−25	−25.−2=+50	−25.+2=−50
	1	−2	+2	0	0

Iloraz więc jest x^2-2x+2 jak być powinno. W tem dzieleniu uważać [illegible]

Potrzeba że używający tego sposobu zamiast dzielenia przemienić potrzeba znaki współczynników drugiego i trzeciego wyrazu na przeciwne, dlatego też napisałem zaraz na początku jako liczby do podstawienia +6 i −25.

Za drugi przykład weźmy równanie

$$f(x)=x^6+18x^5-5x^4-1140x^3-2201x^2+11202x+12285=0$$

i przypuśćmy że na jakiejkolwiek drodze znaleźliśmy dwa jego pierwiastki $+3$ i -5; chcielibyśmy więc zniżyć to równanie do poszukiwania reszty jego pierwiastków. Zniżenie to nastąpi skoro podzielimy $f(x)$ przez czynnik pierwiastkowy $x-3$ albo przez $x+5$ a iloraz stąd wypadający przez drugi z tych czynników. Ale do tego samego dojdziemy rozpadku dzieląc $f(x)$ przez iloczyn z obu czynników t. j. przez $(x-3)(x+5)=x^2+2x-15$. Zamiast dzielenia używając podstawienia będzie

	1	+18	−5	−1140	−2201	+11202	+12285
−2		~~−2.1~~=−2	−2.16=−32	~~−2.−22~~=+44	+1712	+1638	~~−2.0~~= 0
+15	1		15.1=+15	15.16=+240	−330	−12840	~~15.−819~~=−12285
	1	+16	−22	−856	−819	0	0

Zniżone więc o dwa stopnie równanie jest

$$x^4+16x^3-22x^2-856x-819=0$$

Liczby dodawane do współczynników wypadają w pierwszej linii z mnożenia przez -2 poprzedzających wypadków, zaś w drugiej linii z mnożenia przez ~~+~~15 takichże wypadków a to jak następuje:

−2	1	−2.1=−2, −2.16=−32, −2.−22=+44, −2.−856=+1712 i t. d.
+15	.	15.1=15, 15.16=240, 15.−22=−330, 15.−856=−12840

Zatrzymałem się tu nieco dłużej nad podstawieniami i dzieleniem bo się często jest w potrzebie używania tak pierwszego jako i drugiego. A każdy mający z tym rodzajem rachunku do czynienia, zrobi go sobie jak najbardziej skróci i ułatwić; mniemam zaś zdawało że podany poprzednio sposób skrócenia, którego, ile mi wiadomo, pierwszy Strasznicki naużył, zupełnie celowi odpowiada.

§ 11. Jeszcze jedno przerobienie nie rzadko się także używa przy rozwiązywaniu równań, mianowicie zniesienie mianowników współczynników ale tak żeby współczynnik najwyższej potęgi pozostał $=1$. Do tego się przychodzi takowo przerabiając dane równanie $f(x)=0$ na inne, którego by pierwiastki były pewną liczbą razy większe niż danego, a w ogólności m razy większe. Niechże więc danem będzie równanie

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\dots\dots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

Oznaczywszy wyobraźnika pierwiastków szukanego równania przez y, według warunku ma być $y=mx$, skąd $x=\frac{y}{m}$. Położywszy tę wartość w $f(x)$ za x, znajdziemy

$$f(y)=\frac{y^n}{m^n}+a_{n-1}\frac{y^{n-1}}{m^{n-1}}+a_{n-2}\frac{y^{n-2}}{m^{n-2}}+\dots+a_3\frac{y^3}{m^3}+a_2\frac{y^2}{m^2}+a_1\frac{y}{m}+a_0=0$$

a mnożąc całe równanie przez m^n otrzymamy

$$f(y)=y^n+ma_{n-1}y^{n-1}+m^2a_{n-2}y^{n-2}+m^3a_{n-3}y^{n-3}+\dots+m^{n-3}a_3y^3+m^{n-2}a_2y^2+m^{n-1}a_1y+m^n[illegible]$$

Które równanie jest postaci danego z tą różnicą że wyrazy jego tak jak po sobie następują są mnożone przez odpowiednie wyrazy szeregu ~~geo~~ ilorazowego $1, m, m^2, m^3, m^4, \dots m^{n-2}, m^{n-1}, m^n$. Gdyby w równaniu $f(x)=0$ brakowało którego z wyrazów, opuścić też [illegible] by odpowiadający wyraz ostatniego szeregu. Za liczbę m bierze się zawsze najmniejszy dla wszystkich wyrazów wspólny mianownik

§12. Jak twierdzenie, jako wniosek z przerobienia równania $f(x)=o$ w §6. wyprowadzone i dowiedzione, tak nie mniej w rozwiązywaniu równań ważnem jest następujące: jeżeli w wielomianie równania $f(x)$ zamiast x położymy dwie wartości a i b jedna po drugiej, a wypadki tych podstawień otrzymamy ze znakami przeciwnemi, tedy pomiędzy a i b znajduje się koniecznie przynajmniej jeden (rzeczywisty) pierwiastek tegoż równania.

Lubo oba podstawienia mogą być jakie bądź, mianowicie oba dodatne lub odjemne, albo jedno dodatne drugie odjemne, tudzież być może $a>b$ lub $b>a$ ~~[illegible]~~ ale że to wszystko nie zmienia toku dowodu, przyjmijmy wpełaho, abyśmy mieli przed oczyma coś wyraźnego, że oba te podstawienia są dodatne, jak również że $b>a$. Wiadomo że wyrazy równania $f(x)=o$ mogą być poczęści dodatnemi a poczęści odjemnemi, oznaczywszy więc sumę dodatnych przez A, sumę zaś odjemnych przez B, tudzież wypadek z podstawienia a za x oznaczmy jak zwyczajnie przez $f(a)$ a wypadek z drugiego podstawienia przez $f(b)$, nakoniec przypuśćmy że pierwszy wypadek jest dodatnym a drugi odjemnym, tedy ~~wypnie~~

$$f(x) = A-B$$
$$f(a) = A-B = + \quad \text{zatem } A>B$$
$$f(b) = A-B = - \quad \text{"} \quad \sout{B>A \text{ czyli}} \; A<B$$

Ponieważ tak A jako i B zamykają w sobie x, tedy skoro wartość x rośnie od a do b, bośmy przyjęli $b>a$, rosnąć też musi tak A jako i B. Lecz jak naocznie widzimy B prędzej rośnie niż A, bo dla $x=a$ było $A>B$, gdy dla wartości $x=b$ jest $A<B$; w pierwszym przeto razie A przewyższało B a w drugim B przewyższa A. Ponieważ między a i b znajduje się nieskończona liczba pośrednich ~~[illegible]~~ wartości, więc między temi wartościami koniecznie znajdować się musi przynajmniej jedna taka że położona za x tak w A jako i B, równa między sobą te dwa wielomiany. Niech że taką pośrednią wartością będzie α, tedy będzie

$$f(\alpha) = A-B = 0$$

t.j. wartość α przywodzi wielomian równania do zera; każdą zaś taką wartość nazwaliśmy pierwiastkiem, a zatem α przypadające między a i b tak że $a<\alpha<b$, jest pierwiastkiem równania $f(x)=o$

Można też jeszcze krócej tak się wytłómaczyć: ponieważ żadna ilość rosnąca lub malejąca nie przechodzi z jednego do drugiego stanu, t.j. z dodatnego do odjemnego, ani z odjemnego do dodatnego nie przechodząc przez zero, zatem $f(x)$ przechodząc ze stanu dodatnego dla $x=a$ do odjemnego dla $x=b$, musiało w przechodzie x od a do b, napotkać ~~[illegible]~~ którato sprowadziła go jest także na zero, a wartość x ~~dla której~~ właśnie ~~[illegible]~~ jest pierwiastkiem równania $f(x)=o$

Uważmy atoli że się w twierdzeniu powiedziało ~~x~~ przynajmniej jeden, bo w istocie może być w takim razie i więcej, mianowicie 3, 5, 7 itd. według stopnia równania, t.j. każda nieparzysta liczba pierwiastków. Abyśmy ~~to~~ jasno pojęli, z pomiędzy mnóstwa liczb środkujących między a i b, oznaczmy niektóre przez $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots\ldots$ które położone za x w wielomianie $f(x)$, jedne dają wypadki dodatne inne odjemne a jeszcze inne dają ~~x~~ też wypadki równe zero, co każdy łatwo pomyśleć może, ponieważ że $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ mają najrozmaitsze wartości, tedy otrzymać możemy następujące wypadki:

dla $x=a$ jako w założeniu, $f(a)=+$
$x=\alpha_1$ w przypuszczeniu $f(\alpha_1)=0$
$x=\alpha_2$ — — " $f(\alpha_2)=-$
$x=\alpha_3$ — — " $f(\alpha_3)=0$
$x=\alpha_4$ — — " $f(\alpha_4)=+$
$x=\alpha_5$ — — " $f(\alpha_5)=0$
$x=\alpha_6$ — — " $f(\alpha_6)=-$
$x=\alpha_7$ — — " $f(\alpha_7)=0$
$x=\alpha_8$ — — " $f(\alpha_8)=+$
$x=\alpha_9$ — — " $f(\alpha_9)=0$
$x=b$ z założenia $f(b)=-$

Tu się już jasno pokazuje że dwa podstawienia $x=a$ i $x=b$ dają wypadki z przeciwnemi znakami a wszelako kiedy x przybierało kolejno wartości $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_9$, $f(x)$ przeszła 5 razy przez zero, więc też między a i b, znajduje się pięć pierwiastków równania. Podobnie, dla $x=a$ i $x=\alpha_6$ mamy to że wypadki z przeciwnemi znakami, ale też $f(x)$ dla wartości $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_6$ przeszła 3 razy przez zero. Nareszcie dla $x=a$ i $x=\alpha_2$, wypadki są również z przeciwnemi znakami, to też $f(x)$ przeszła raz przez zero gdy x przechodziło wartości α_1 i α_2 i t.d. Prawdą więc jest że jeżeli wypadki dwóch podstawień otrzymamy z przeciwnemi znakami, między temi podstawieniami znajdować się może każda nieparzysta liczba pierwiastków.

Drugie twierdzenie wyprowadzić tu można jako wniosek z teraźniejszego, że jeżeli wypadki dwóch podstawień są z temi samemi znakami, między temi podstawieniami albo nie masz żadnego, albo też każda liczba parzysta pierwiastków, stosownie do stopnia równania. Bo jeżeli wypadki nie odmienią znaków, $f(x)$ nie mogła, według powyższej uwagi, przejść przez zero. Dalej zaś widzimy że dla $x=a$ i $x=\alpha_4$, jako też dla $x=\alpha_2$ i $x=\alpha_6$ wypadki mają te same znaki, a (wszelako) $f(x)$ przeszła 2 razy przez zero, zatem między a i α_4 jako też między α_2 i α_6 przypadają dwa pierwiastki równania. Dla $x=a$ i $x=\alpha_8$, jako też dla $x=\alpha_2$ i $x=b$ wypadki są także ze znakami temi samemi, a $f(x)$ tak od a do α_8, jak równie od α_2 do b przeszła 4 razy przez zero, i tak o innych. Prawdą więc jest powtórnie, że jeżeli dwa podstawienia dają wypadki oba dodatnie lub odjemne, między temi podstawieniami nie ma równanie albo żadnego pierwiastka, albo też wypełnią liczbę parzystą.

§13. Na poprzedniem twierdzeniu zasadza się też dowód innego twierdzenia, że każde równanie stopnia nieparzystego ma przynajmniej jeden rzeczywisty pierwiastek ze znakiem przeciwnym ostatniego jego wyrazu, oraz twierdzenia, że każde równanie stopnia parzystego którego ostatni wyraz jest odjemnym, ma przynajmniej dwa rzeczywiste pierwiastki jeden dodatni, drugi odjemny. Dowód ~~tu~~ (wyżej wyłożonych) dwóch twierdzeń jest nader łatwy przyjąwszy tylko że położywszy za x największy współczynnik jaki się w $f(x)$ znajduje, powiększony jednością, wyraz pierwszy t.j. x^n wielomianu $f(x)$ przewyższy sumę wszystkich innych wyrazów. ~~Nazw~~ Oznaczywszy bowiem ten największy współczynnik przez a_m, mieć będziemy:

Co do pierwszego, gdzie ostatni wyraz jest $\pm a_0$

Położywszy w $f(x)$, $x=0$, wypadek będzie — — — $\pm a_0$

położywszy zaś $x=$ ~~a_m~~ $\mp(a_m+1)$, wypadek będzie $\mp$

z czego widzimy że dla $x=0$ i $x=-(a_m+1)$ mamy wypadki $+a_0$ i $-$ t.j. ze znakami przeciwnemi; zaś dla $x=0$ i $x=+(a_m+1)$ wypadki $-a_0$ i $+$ t.j. wypadki także ze znakami przeciwnemi. W pierwszym więc razie między 0 i $-(a_m+1)$ znajduje się przynajmniej jeden ~~pierwiastek~~, jak również w drugim razie między 0 i $+(a_m+1)$ także przynajmniej jeden pierwiastek. Pierwszy naturalnie jest odjemny a drugi dodatny. Ale pierwszy odpowiada równaniu którego ostatni wyraz jest $+a_0$, drugi zaś równa[niu]

w którem ostatni wyraz jest $-a_0$, zatem prawdą jest co twierdzono.
Co do drugiego gdzie według twierdzenia ostatni wyraz jest $-a_0$
Połóżmy raz $x=-(a_m+1)$, a drugi raz $x=+(a_m+1)$, ponieważ stopień równania jest parzystym, w obu razach wypadki będą dodatnie, bo x^n tak dla pierwszej jak i drugiej wartości będzie dodatne, a dlatego

$$\begin{aligned} \text{dla}\quad x &= -(a_m+1) \;---\; f(x) = + \\ x &= 0 \;---\; f(x) = -a_0 \\ x &= +(a_m+1) \;---\; f(x) = + \end{aligned}$$

z czego widzimy że między 0 i $-(a_m+1)$ jest przynajmniej jeden pierwiastek a ten naturalnie odjemny; tudzież między 0 i $+(a_m+1)$, także przynajmniej jeden pierwiastek a ten dodatny. Jest więc to prawdą jak twierdzono.

[illegible]

§14. Dobrze także czasem wiedzieć, gdy nam przychodzi rozwiązać jakie zrównanie że zrównanie stopnia parzystego, którego ostatni wyraz jest dodatnym ma przynajmniej jeden pierwiastek postaci $p+q\sqrt{-1}$ czyli pierwiastek zero- jony; dowód atoli tak ten jest przydłuższy dlatego tu go pomijam odsyłając ciekawych do dzieła „ausführliches Lehrbuch der höheren Mathematik von Burg. Wien 1832 który to twierdzenie całkiem elementarnie dowiódł. Tu tylko wspomnę, że z dowodu tego wypada potem jako wniosek, że też samo zrównanie oprócz pierwiastka $p+q\sqrt{-1}$ ma też i drugi $p-q\sqrt{-1}$, bo pierwiastki urojone zawsze w parze chodzą, jak się to już w §10 wspomniało. Z tego to powodu dwa pierwiastki urojone, będź to postaci jak powyższe $p+q\sqrt{-1}$ i $p-q\sqrt{-1}$, będź też postaci $+q\sqrt{-1}$ i $-q\sqrt{-1}$, w przypadku gdy $p=0$, nazywają się z sobą złączonemi albo do siebie należącemi. Żadne też zrównanie nie może mieć nieparzystej, ale zawsze parzystą liczbę pierwiastków urojonych jeżeli w ogólności takowe ma istotnie. Zastrzegam atoli, że pod powyższą postacią mogą być i pierwiastki rzeczywiste w przypadku gdy $q=0$.

§15. Już w §5 widzieliśmy że skoro zrównanie $f(x)=0$ ma same pierwiastki dodatne, w wielomianie jego, w którym żadnego wyrazu nie brakuje, znaki wyrazów idą na przemian $+-+-+-$ i t.d. ~~Takie przemiany znaków nazywamy gdy dwa nie~~ ~~przemianą znaków~~. Jeżeli zaś zrównanie $f(x)=0$ ma same pierwiastki odjemne, natenczas wszystkie znaki wyrazów jego wielomianu są dodatne. W przypadku że dwa znaki następują po sobie $++$ albo $--$, nazywamy to następstwem znaków, jeżeli zaś dwa po sobie następujące wyrazy mają znaki przeciwne t.j. $+-$ lub $-+$, nazywamy ~~takie~~ przemianą znaków. Ponieważ wielomian zrównania stopnia n, jeżeli w nim żadnego wyrazu nie brakuje, ma wyrazów $n+1$, więc skoro się w tymże wielomianie znajdują tak następstwa jako i przemiany znaków, suma pierwszych i drugich nie jest większą ani mniejszą od n. Z przywiedzionego powyżej § wnioskować byśmy mogli ~~XXX~~ iż, jeżeli w wielomianie zrównania są same przemiany znaków, to i zrównanie ma same pierwiastki dodatne, jeżeli zaś w tym wielomianie są same znaki dodatne, że też zrównanie ma tylko pierwiastki odjemne. Tak atoli nie jest w każdym przypadku, gdyż każde z takich zrównań może też mieć obok rzeczywistych i pierwiastki urojone, a nawet same urojone gdy wszystkie znaki są dodatne a stopień zrównania jest parzystym. Przyczyna tego jest następująca: widzieliśmy że urojone pierwiastki są zawsze do pary, weźmy więc jedną taką parę np. $p+q\sqrt{-1}$ i $p-q\sqrt{-1}$, czynniki pierwiastkowe z których wielomian $f(x)$, jak wiemy, powstaje, będą $x-p-q\sqrt{-1}$ i $x-p+q\sqrt{-1}$ które mnożąc przez siebie znajdziemy $(x-p)^2+q^2$. Aże suma dwóch kwadratów nie może nigdy być odjemną ale zawsze dodatną i ponieważ każda inna para pierwiastków urojonych wyda także czynnik pierwiastkowy dodatny,

F w którém co do znaków to tylko wiemy, że przy wyrazie $a_p x^p$ jest pierwsza, przy wyrazie $a_q x^q$ druga, przy wyrazie $a_r x^r$ trzecia ~~przemiana znaków~~ a przy wyrazie $a_1 x^2$ ostatnia przemiana znaków, odkąd idą już same następstwa; jest więc ~~[illegible]~~ poniekąd wiadomą liczba przemian znaków w tym wielomianie, chociaż w jego najmniejszej porze.

$$\varphi \quad (x-\alpha)f(x) = x^{n+1} + + \dots - a_p x^{p+1} - \dots + a_q x^{q+1} + \dots - a_r x^{r+1} + \dots \pm a_1 x^2 \pm a_0 x$$
$$- - \dots - \alpha a_{p-1} x^{p+1} + + \dots + \alpha a_{q-1} x^{q+1} - \dots - \alpha a_{r-1} x^{r+1} + \dots \mp \alpha a_1 x \mp \alpha a_0$$
$$(x-\alpha)f(x) = x^{n+1} \dots - A_p x^{p+1} \dots A_q x^{q+1} \dots A_r x^{r+1} \dots A_1 x \mp A_0 = 0$$

zatem wynikłe pierwiastkowe pochodzące z pierwiastków urojonych nie mają żadnego wpływu na zmianę znaków wielomianu pochodzącego z pierwiastków rzeczywistych. To dobrze zrozumiawszy, nie trudno będzie zrozumieć twierdzenie podane przez Dekarta (Descartes) w r. 1637, a najprzód dowodzione przez Gaussa w III tomie Żurnalu wydawanego przez Crelle (o liczbie pierwiastków tak dodatnych jako i odjemnych równania $f(x)=0$).

§16. Twierdzenie to brzmi: **równanie $f(x)=0$ nie może mieć więcej pierwiastków dodatnych jak liczba przemian znaków w wielomianie $f(x)$, ani więcej pierwiastków odjemnych jak jest liczba następstw znaków w tymże wielomianie.** ~~Oznaczmy~~ Niech będzie równanie

$$f(x) = x^n + + \dots - a_p x^p - \dots + a_q x^q + + \dots - a_r x^r - \dots \pm a_2 x^2 \pm a_1 x \pm a_0$$

Rozmnożywszy to równanie przez $x-\alpha$ t. j. przez czynnik pierwiastkowy pochodzący z dodatnego pierwiastka α i porządkując wyrazy pochodzące z mnożenia tak przez x jako też przez $-\alpha$, według potęg x będzie

$$\varphi \quad f(x)(x-\alpha) = x^{n+1} + + \dots - a_p x^{p+1} - \dots + a_q x^{q+1} + + \dots - a_r x^{r+1} \dots \pm a_2 x^3 \pm a_1 x^2 \pm a_0 x$$
$$- - \dots - \alpha a_{p-1} x^{p+1} + + \dots + \alpha a_{q-1} x^{q+1} - \dots - \alpha a_{r-1} x^{r+1} + + \dots \mp \alpha a_3 x^3 \mp \alpha a_2 x^2 \mp \alpha a_1 x$$
$$x^{n+1} \dots - A_p x^{p+1} \dots + A_q x^{q+1} \dots - A_r x^{r+1} \dots \pm A_2 x^2 \pm A_1 x \mp A_0$$

Jakkolwiek w tym iloczynie nie znamy znaków pośrednich, to przecież z pewnością tyle wiemy że od x^{n+1} aż do $A_p x^{p+1}$ jest przynajmniej jedna, do $A_q x^{q+1}$ przynajmniej dwie, do wyrazu $A_r x^{r+1}$ przynajmniej trzy i t. d. aż do wyrazu $A_1 x$ jest przynajmniej tyle przemian znaków ile ich było w $f(x)$. Gdy przez to mnożenie ostatni wyraz z $\pm a_0$ przeszedł na $\mp \alpha a_0$ czyli $\mp A_0$ t. j. zmienił swój znak, zatem przybyła z tego mnożenia przynajmniej jedna przemiana znaków. Po poprzedzającym oznaczmy teraz wielomian pochodzący z pierwiastków odjemnych i urojonych, który z tego powodu będzie miał wszystkie znaki dodatne czyli same następstwa znaków, przez $F(x)$, tudzież oznaczywszy wszystkie dodatne pierwiastki równania $f(x)=0$ przez $x_1, x_2, x_3, x_4 \dots$ według powyższego, w wielomianie $(x-x_1)F(x)$, będzie przynajmniej jedna, w wielomianie $(x-x_1)(x-x_2)F(x)$ przynajmniej dwie, w wielomianie $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)F(x)$ przynajmniej trzy i t. d. ~~będzie~~ przemian znaków t. j. tyle ile ~~wielomianie~~ równanie $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(\dots)F(x)$ ma dodatnych pierwiastków.

Przerobiwszy równanie $f(x)=0$, według §5, na inne, którego by pierwiastki były z przeciwnemi znakami pierwiastków tegoż, oznaczmy jego wielomian przez $\psi(x)$. Według ~~poprzedzającego~~ §5, równanie $\psi(x)=0$ ma tyle pierwiastków dodatnych, ile równanie $f(x)=0$, odjemnych; równanie zaś pierwsze według poprzedzającego tyle ma przemian znaków ile ma pierwiastków dodatnych, oraz tyle ile równanie $f(x)=0$ ~~[illegible]~~ ma odjemnych ~~pierwiastków~~. Ale bardo łatwo jest dostrzeć że przechodząc ze równania $f(x)=0$ do $\psi(x)=0$, każde następstwo w pierwszem, rodzi przemianę znaków w drugiem, a każda przemiana, następstwo; liczba więc przemian znaków dodatne pierwiastki drugiego, t. j. odjemnemi pierwszego równania tak jak liczba odpowiada liczbie następstw znaków. Gdy suma przemian i następstw jest zawsze równa najwyższemu wykładnikowi n równania, jeżeli żadnego wyrazu nie brakuje, więc prawdą jest jak na początku tego §fu twierdzono.

To atoli twierdzenie wtedy tylko jest prawdziwem, gdy równanie $f(x)=0$ ma same pierwiastki rzeczywiste, bo w poprzedzającym §fie widzieliśmy, że urojone pierwiastki nie mają wpływu na zmianę znaków wielomianu $f(x)$. Z tego powodu w powyższem twierdzeniu wyrażono że równanie $f(x)=0$ **nie może mieć więcej pierwiastków i t. d.** a nie powiedziano, **ani mniej**; bo zazwyczaj gdy też równanie ma pierwiastki urojone, natenczas może mieć mniej bądź dodatnych bądź odjemnych, bądź też tak pierwszych jak drugich.

§17. Po tych najważniejszych a koniecznych przy rozwiązywaniu równań twierdzeniach, zobaczmy teraz jakie sobie zadać musimy pytania, mając przed sobą równanie do rozwiązania, oraz jak na nie odpowiemy?

Mając zrównanie $f(x)=0$ do rozwiązania, zachodzi pierwsze pytanie czyli pierwiastki tego zrównania są rzetelne lub urojone? Czyli jakie do poznania pierwiastki urojone, podało się na to cechę w §14 ale tylko dla zrównań stopnia parzystego, mianowicie że jeżeli takie zrównanie nie ma ostatni wyraz dodatny, jest ⁊ [przekreślone] rzecz, że ma i pierwiastki urojone: wyjąwszy zrównania drugiego stopnia w których kwadrat z połowy współczynnika drugiego wyrazu jest większym niż ostatni wyraz.

⁊ bardzo prawdopodobną

Żeby zaś osądzić czyli w ogólności zrównanie $f(x)=0$ ma pierwiastki urojone, o tém z pewnością wyrzec możemy wtedy tylko, gdy w tém zrównaniu brakuje wyrazu ∓ [przekreślone]. Na zasadzie bowiem twierdzenia Dekarta w poprzednim § już dowiedzionego, załóżmy pierwszy wyraz ✝ brakujący wyrażeniem $x^n \pm 0$ i potém rachując liczbę tak przemian jako i następstw znaków w obu przypadkach, znajdziemy w każdym różną liczbę dodatnych i odjemnych pierwiastków, co jednak być nie może, bo też zrównanie przez dodanie wyrazu ± 0 w niczém się nie zmienia, a zatém i liczba tak dodatnych jako też i odjemnych pierwiastków zmienić się nie powinna.

∓ między dwoma po sobie następującemi i z jednakowemi znakami. [przekreślone]

Jeżeli jednak wyrazy, między którémi brakuje jednego mają przeciwne [przekreślone] znaki, wtedy ta skazówka odpada. Tak np. zrównanie $f(x)=x^6+x^4+x^2-3=0$ ma cztery pierwiastki urojone, bo napisawszy je raz tak: $x^6+0x^5+x^4+0x^3+x^2+0x-3=0$, według twierdzenia Dekarta miećby powinno 5 pierwiastków odjemnych a jeden dodatny, gdyż ma pięć [przekreślone] następstw, a tylko jedną przemianę znaków. Napisawszy je zaś następnie: $x^6-0x^5+x^4-0x^3+x^2-0x-3=0$, musiałoby mieć [przekreślone] 5 pierwiastków dodatnych (a jeden odjemny) bo ma pięć przemian a jedno następstwo znaków. Ale ten ostatni wniosek sprzeciwia się pierwszemu, więc też zrównanie ma pierwiastki urojone, a mianowicie z powodu brakującego wyrazu z potęgą x^5 dwa, a z powodu wyrazu x^3 znowu dwa. Brakujący wyraz $0x$, nie wskazuje na pierwiastki urojone gdyż przypada pomiędzy dwa różnemi znakami i daje w pierwszém zrównaniu przemianę i następstwo gdy w drugiém daje przeciwnie przemianę i następstwo, co w obu razach wskazuje rzetelne pierwiastki jeden dodatny drugi odjemny.

✝ Jeżeli wielomian zrównania $f(x)=0$ rozmnożymy przez $x-\alpha$ albo $x+\alpha$ gdzie α jest dowolną liczbą, a w iloczynie w pierwszym przypadku przyjdzie więcej niż jedna przemiana, w drugim zaś więcej niż jedno następstwo znaków wskazać także możemy że też zrównanie ma pierwiastki urojone. Na mocy bowiem twierdzenia Dekarta więcej przybyć nie powinno jak jeden pierwotnego zrównania pierwiastek, bo się rzetelne. Odwrotnie atoli wnioskować nie można, mianowicie że jeżeli przybędzie tylko jedna przemiana lub jedno następstwo znaków, pierwotne zrównanie nie ma pierwiastków urojonych.

✝ Ponieważ urojone pierwiastki nie wiele pożytku w praktyce przynoszą, dla tego się też dłużej nad skazówkami ich w zrównaniu bytności nie zatrzymuję. Rzetelnych zaś pierwiastków w zrównaniu, poznaliśmy w §13 dwie zupełnie pewne skazówki.

§18. Po załatwieniu poprzedniego, następuje drugie ważniejsze pytanie, czyli będące przed oczyma zrównanie ma pierwiastki całkowite lub nie? Tu podał Gauss pewną następującą skazówkę: jeżeli w zrównaniu $f(x)=0$, w którém wszystkie współczynniki są liczbami całkowitemi, położymy raz $x=0$ a drugi raz $x=1$, a otrzymane wypadki $f(0)$ i $f(1)$ są liczbami nieparzystemi, wtedy też zrównanie nie ma pierwiastków całkowitych. Z powodu ważności tego twierdzenia, należy je udowodnić, poprzedzając atoli ten dowód równie ważnemi w teoryi zrównań twierdzeniami.

I) Niech będzie $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ w którém zrównaniu wszystkie współczynniki są liczbami całkowitemi. Oznaczmy przez a i b dwie jakiekolwiek, byle całkowite i obie dodatne lub obie odjemne, liczby. Jeżeli różnica tych dwóch liczb $b-a$ jest podzielną bez reszty przez pewną także całkowitą liczbę m, tedy również różnica wypadków z podstawienia $x=a$ i $x=b$, t. j. różnica $f(b)-f(a)$ podzielną też będzie przez tęż samą liczbę m także bez reszty. Jest bowiem

$$f(b) = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + a_{n-3} b^{n-3} + \ldots\ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$
$$f(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + a_{n-2} a^{n-2} + a_{n-3} a^{n-3} + \ldots\ldots + a_2 a^2 + a_1 a + a_0$$
$$f(b) - f(a) = a_n(b^n - a^n) + a_{n-1}(b^{n-1} - a^{n-1}) + a_{n-2}(b^{n-2} - a^{n-2}) + \ldots + a_2(b^2 - a^2) + a_1(b-a)$$

Druga strona tego zrównania jest widocznie podzielną przez $b-a$ jak z Arytme-
tiki wiadomo, przeto i pierwsza. A kiedy $f(b)-f(a)$ jest podzielną przez $b-a$, m-
si též być podzielną i przez każdy czynnik na które się $b-a$ rozłożyć może, a nas-
tępnie jest też podzielną i przez m

II) Położywszy w zrównaniu $f(x)=0$ raz $x=a$, drugi raz $x=b$ i każdy z wypadk-
$f(a)$ i $f(b)$ podzieliwszy przez $b-a$, reszty z tego dzielenia wypadające będą r-
ówne. Oznaczywszy bowiem całkowity iloraz z podzielenia $f(a)$, przez q a r-
esztę przez r, iloraz zaś z podzielenia $f(b)$, przez q' a resztę przez r', będzie

$$f(a) = (b-a)q + r \quad \text{zaś} \quad f(b) = (b-a)q' + r'$$

a następnie
$$f(b) - f(a) = (b-a)(q'-q) + r' - r$$

albo
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = q' - q + \frac{r'-r}{b-a}$$

Pierwsza strona tego zrównania jest według I) liczbą całkowitą, więc i druga
takąż być musi, co jak widzimy wymaga żeby $r'-r$ było podzielnem (przez $b-a$) bez reszt-
Ale $r' < b-a$ i $r < b-a$ jako reszty z dzielenia, więc tem bardziej $r'-r < b-a$
nie może więc różnica $r'-r$ inaczej być podzielną przez $b-a$, tylko jeżeli
$r'-r=0$, skąd nareszcie $r'=r$.

III) Położywszy w wielomianie $f(x)$; liczby dodatne lub odjemne $a, a+1, a+2, a+3 \ldots\ldots$ za x, oraz dziel-
wypadki $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a+2)\ldots\ldots$ przez pewną liczbę całkowitą m, reszty
z tego dzielenia powracać będą te same i w tymże samym porządku do nie-
skończoności. — Oznaczmy bowiem wyraz na miejscu $(m+1)^{\text{szym}}$ w owym szereg-
liczb stojący przez b, tedy zawsze będzie $b-a=m$, zatem na mocy II) reszty
z podzielenia tak $f(a)$ jako i $f(b)$ przez $b-a=m$ będą między sobą równe.
Lecz i reszty z podzielenia $f(a+1)$ i $f(b+1)$ przez $b-a$ są które między s-
bą równe bo $(b+1)-(a+1)=m$. Zupełnie to samo rozumie się o $f(a+2)$ i $f(b+$
$f(a+3)$ i $f(b+3)$ i t.d. z czego się pokazuje że pierwsze m reszt powta-
rzać się będą bez końca w tymże samym porządku. Gdybyśmy zamia-
st tych, położyli za x liczby $a-1, a-2, a-3$, i t.d. otrzymywalibyśmy
też same reszty, ale w odwrotnym porządku.

IV) Jeżeli w zrównaniu $f(x)=0$ s[ą] w tych przygotowawczych twierdzeniach,
uważać zawsze należy współczynniki zrównania jako liczby całkowite.
położymy jedna po drugiej liczby całkowite $a, a+1, a+2, a+3, \ldots\ldots a+(m-$
bądź dodatne bądź odjemne, i jeżeli żaden z wypadków nie jest podziel-
nym przez m bez reszty, zrównanie $f(x)=0$ nie może mieć pierwiast-
ków całkowitych. Niech bowiem α będzie pewną dodatną lub odjemną
całkowitą liczbą, tedy wiemy że reszta wypadająca z dzielenia $f(\alpha)$ prz-
m, równą będzie jednej z reszt wypadających z podzielenia liczb $f(a)$
$f(a+1)$, $f(a+2)$, $f(a+3)\ldots\ldots f(a+m-1)$ przez m, według III); gdy zaś ż-
dna z tych reszt nie jest $=0$, zatem $f(\alpha)$ = wielokrotności z m, wię-
cej mniejszą liczbą niż m lecz różną od zera, a dlatego $f(\alpha)$ nie może
być $=0$ a następnie zrównanie $f(x)=0$ nie może mieć pierwiastka ca-
łkowitego. —

§19. Po tém przygotowaniu przystępuję do dowodu twierdzenia Gaus-
sa na początku przeszłego §fu wystawionego.

Jeżeli współczynniki zrównania $f(x)=0$ są liczbami ~~cał~~ całkowitemi,
ostatni jego wyraz nie mający w sobie x liczbą nieparzystą, suma zaś
wszystkich innych współczynników liczbą parzystą, takie zrównanie
nie może mieć pierwiastka całkowitego. Połóżmy bowiem raz $x=0$
drugi raz $x=1$, skąd otrzymamy $f(0)$ i $f(1)$. Że zaś te wypadki nie są
bez reszty podzielne przez $m=2$, t.j. przez liczbę podstawień, tedy na mocy
IV) to zrównanie nie może mieć pierwiastka całkowitego. Tak np.

w równaniu $f(x) = 192x^4 - 232x^3 + 12x^2 + 58x - 15 = 0$ ostatni wyraz -15 jest liczbą nieparzystą zaś $192 - 232 + 12 + 58 = +30$ jest liczbą parzystą; ponieważ $f(0) = -15$ a $f(1) = +15$ a żadna z tych liczb nie jest podzielną przez 2, zatem to równanie nie ma pierwiastka całkowitego.

Podobnież równanie $f(x) = x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 12x - 75 = 0$ nie ma całkowitego pierwiastka z powodu naprzód dwóch liczb -75 i $1 - 20 + 15 - 12 = -16$. Tudzież że liczby $f(0) = -75$ i $f(1) = -91$ nie są podzielnemi przez 2.

Jeżeli w równaniu $f(x) = 0$ żaden z wypadków $f(-1)$, $f(0)$ i $f(1)$ nie jest podzielnym przez 3 bez reszty, tedy i takie równanie nie ma pierwiastka całkowitego. (Dowód zasadza się na IV) kładąc tam że $a = x - 1$ a $m = 3$. Tak np. w równaniu $f(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 4 = 0$ mamy: $f(-1) = +17$, $f(0) = +4$, $f(1) = +1$ z których wypadków żaden nie jest podzielnym przez 3, a dlatego dane równanie nie ma pierwiastka całkowitego.

W równaniu $f(x) = 2x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 3x - 80 = 0$, jest $f(-1) = -94$, $f(0) = -80$ $f(1) = -82$, nie ma więc to równanie pierwiastka całkowitego

Jeżeli suma wszystkich współczynników z równania $f(x) = 0$, (rozumie się tu zawsze że te współczynniki są liczbami całkowitemi) jest liczbą nieparzystą, tedy to równanie nie ma żadnego całkowitego nieparzystego pierwiastka. Bo dzieląc $f(1)$ przez 2 zostanie reszta 1, gdyż z założenia suma współczynników jest liczbą nieparzystą. A że na mocy III) dzieląc $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$ ..... $f(-1)$, $f(-3)$, $f(-5)$ ..... przez 2, otrzyma się zawsze resztę 1, więc kładąc w $f(x) = 0$ jakąkolwiek całkowitą i nieparzystą liczbę za x, otrzymać się musi na wypadek liczba nieparzysta; przeto rzeczone równanie nie może mieć pierwiastka całkowitego nieparzystego. Tak np. w równaniu $f(x) = 6x^5 - 49x^4 + 30x^3 + 300x^2 - 56x - 96 = 0$ jest suma $6 - 49 + 30 + 300 - 56 - 96 = +135$ liczba nieparzysta, to przeto równanie nie ma żadnego całkowitego a nieparzystego pierwiastka. Toteż pomiędzy dokładnemi dzielnikami ostatniego wyrazu znajduje się tylko liczba nieparzysta 3, którą probując przekonamy się że nie jest pierwiastkiem tego równania.

W równaniu $x^4 - 40x^3 + 32x^2 - 18x - 90 = 0$ jest suma wszystkich współczynników $= -115$ t. j. liczba nieparzysta; dokładne zaś nieparzyste dzielniki ostatniego wyrazu 90 są 1, 3, 5, 9, 15, 45 z których żaden nie jest pierwiastkiem tego równania.

§20. Jeżeli uwagi poprzednie doprowadziły nas do przekonania że równanie $f(x) = 0$ ma pierwiastki całkowite, jakże je wynaleźć? Z §5 wiemy że ostatni wyraz równania jest iloczynem ze wszystkich pierwiastków, znalazłszy zatem wszystkie dokładne dzielniki ostatniego wyrazu, pomiędzy niemi znajdować się będą koniecznie i pierwiastki całkowite tego równania. Probując przez podstawienie każdego z tych dzielników tak dodatnie jak też i odjemnie, znajdziemy z pewnością całkowite pierwiastki probane.

Ta atoli robota byłaby dość nudną w przypadku gdyby ostatni wyraz miał wiele dzielników, dlatego szukać należy krótszego sposobu mianowicie rozpoznać, które z tych dzielników mogą a które nie mogą być pierwiastkami równania. Na to podam sposób mówiąc nieco niżej o granicach pierwiastków równania danego. Tu tylko jeszcze dodam, iż znalazłszy całkowite pierwiastki z równania, można się takowych pozbyć dzieląc wielomian $f(x)$ przez iloczyn z czynników pierwiastkowych, przez co jak wiemy zniży się stopień równania o tyle jedności ile się znalazło pierwiastków. (Z nowem przeto zniżonem równaniem przedsiębierze się następna robota. Tak np. mając do rozwiązania równanie

$$f(x) = 12x^6 + 7x^5 - 116x^4 + 6x^3 + 258x^2 - 81x - 54 = 0$$

uważam naprzód że jako równanie parzystego stopnia z odjemnym ostatnim wyrazem, według §13 ma przynajmniej dwa rzeczywiste pierwiastki jeden dodatny drugi odjemny. Czyli ma pierwiastki urojone, nie można to nie wskazuje. Przypuszczając że pierwiastki tego równania są wszystkie rzeczywiste, muszą być trzy dodatne a trzy odjemne według §16, ma bowiem trzy przemiany i trzy następstwa znaków. Czy te pierwiastki są całkowite według §19, mamy $f(0) = -54$ i $f(1) = +32$ obie liczby parzyste, a zatem ma pierwiastki całkowite tak parzyste jako i nieparzyste. Dalej, ponieważ współczynnik najwyższej potęgi x nie jest 1, więc wielomian $f(x)$ nie mógł powstać z samych czynników postaci $x \pm a$, ale musiał być między niemi choćby tylko jeden postaci $ax \pm b$, a to nam wskazuje że to równanie ma także pierwiastki ułamkowe. Szukajmy więc naprzód pierwiastków całkowitych. Dokładnemi dzielnikami ostatniego wyrazu t.j. liczby 54 są liczby 2, 3, 6, 9, 18, 27 i 54. Spróbujmy więc czyli 2 nie jest pierwiastkiem równania, podstawiając $x = 2$, tedy

$$\begin{array}{lrrrrrrr} & 12 & +7 & -116 & +6 & +258 & -81 & -54 \\ 2) & 12 & +31 & -54 & -102 & +54 & +27 & \pm 0 \end{array}$$

przeto 2 jest jednym z pierwiastków całkowitych. Kładąc powtóre $x = -3$ będzie

$$\begin{array}{lrrrrrr} -3) & 12 & -29 & -29 & +93 & -21 & -18 & 0 \end{array}$$

zatem i -3 jest pierwiastkiem tego równania. Próbując dalszych dzielników, okaże się że żaden więcej nie jest pierwiastkiem naszego równania. Dzieląc teraz dane równanie przez $(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$ znajdziemy na iloraz $12x^4 - 5x^3 - 39x^2 + 15x + 9$ który położywszy $= 0$ otrzymamy równanie dające cztery inne pierwiastki założonego równania. To równanie napisawszy tak $x^4 - \frac{5}{12}x^3 - \frac{39}{12}x^2 + \frac{15}{12}x + \frac{9}{12} = 0$ widzimy że dokładnemi dzielnikami licznika ostatniego wyrazu są 1, 3, 9; mianownika zaś, 1, 2, 3, 4, 6, 12. Że pierwiastki mają być ułamkami więc tylko

(niektóre z pomiędzy ułamków)

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{3}{4}$, i $\frac{9}{12}$ czyli $\frac{3}{4}$ t.j. pojedyncze ułamki mogą być pierwiastkami naszego równania. Próbując podstawić te ułamki tak dodatnio jako i odjemnie, znajdziemy że tylko $-\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{4}$ są pierwiastkami, bo

$$\begin{array}{lrrrrr} & 12 & -5 & -39 & +15 & +9 \\ -\frac{1}{3}) & 12 & -9 & -36 & +27 & -0 \end{array} \qquad \begin{array}{lrrrrr} & 12 & -5 & -39 & +15 & +9 \\ \frac{3}{4}) & 12 & +4 & -36 & -12 & 0 \end{array}$$

przeto dzieląc wielomian ostatniego równania przez $(x+\frac{1}{3})(x-\frac{3}{4})$ czyli przez $(3x+1)(4x-3) = 12x^2 - 5x - 3$ znajdziemy na iloraz $x^2 - 3$ t.j. zniżyliśmy równanie znowu o dwa stopnie. A położywszy ostatni iloraz $= 0$ będzie $x^2 - 3 = 0$ skąd $x = \pm\sqrt{3}$.

Tak tedy prowadząc się temi różnemi uwagami znaleźliśmy sześć pierwiastków założonego równania mianowicie

~~$x_1 =$~~ $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = -\frac{1}{3},\ x_5 = +\sqrt{3},\ x_6 = -\sqrt{3}$

Lecz nie zawsze, a nawet bardzo rzadko uda się takim małym zachodem znaleźć pierwiastki, szczególniej ułamkowe i gdy licznik i mianownik ~~mają~~ ostatniego wyrazu, mają wiele dzielników; dlatego w takim razie przerabia się równanie jak powyższe szóstego stopnia, według §11. Kładąc $x' = mx = 12x$ skąd $x = \frac{x'}{12}$, przez co ułamkowe pierwiastki przejdą na całkowite przerobionego równania, a te znalazłszy, potrzeba każdy podzielić przez 12 a otrzymamy pierwiastki ułamkowe naszego równania. Mówiąc też o granicach pierwiastków, przekonamy się że i ta znajomość wielce ułatwia szukanie pierwiastków oszczędzając nam wiele niepotrzebnych prób.

§21. Dotąd badaliśmy tylko czyli równanie $f(x)=0$ może mieć pierwiastki urojone lub nie, tudzież całkowite lub ułamkowe a zatém wymierne. Ponieważ jednak takie równanie może też mieć pierwiastki równe, jakie się o tém przekonamy? Nie prowadzę tu dowodu dla ścisłości postępowania, bo go ułatwi znajdzie w teoryi równań,(*) wskażę tylko w tym celu [illegible] zrobić który. Mając równanie $f(x)=0$ i chcąc wiedzieć czyli ma lub nie pierwiastki równe, wyprowadza się z wielomianu $f(x)$ pochodny $f_1(x)$ według §6. i szuka się między temi wielomianami wspólnego największego dzielnika według Arytmetyki. Tego znalazłszy, potrzeba go rozłożyć na czynniki linijowe, w niektórych razach podniesione do różnych potęg. Te potęgi wskażą nam wiele razy każdy z pierwiastków jest pierwiastkiem równania. Jeżeliby zaś rzeczone wielomiany nie miały wspólnego dzielnika, będzie to dowodem, że równanie $f(x)=0$ nie ma pierwiastków równych. Przypuściwszy że po rozłożeniu na czynniki znalezionego wspólnego dzielnika, otrzymało się $(x-\alpha)^3(x-\beta)^2(x+\gamma)$, tedy wnieściemy że liczba α jest poczwórnym[¹], liczba β potrójnym, a nareszcie liczba $-\gamma$ podwójnym pierwiastkiem równania. Podzieliwszy następnie równanie $f(x)=0$ przez znaleziony wspólny dzielnik, otrzyma się równanie zniżone którego każda z powyższych liczb $\alpha, \beta, -\gamma$, będzie jeszcze pierwiastkiem, oraz inne [illegible] nieznane. Weźmy chociaż jeden przykład. Chcąc wiedzieć czyli równanie

$$f(x) = x^7-7x^6+10x^5+22x^4-43x^3-35x^2+48x+36=0$$

ma pierwiastki równe lub nie, tedy wyprowadziwszy wielomian pochodny pierwszy $f_1(x) = 7x^6-42x^5+50x^4+88x^3-129x^2-70x+48$ i szukamy między $f(x)$ i $f_1(x)$ wspólnego największego dzielnika. Ten znajdziemy rzeczywiście $= x^4-3x^3-3x^2+7x+6$. Rozłożenie tego dzielnika na czynniki uskutecznić można następującym sposobem:

$$x^4-3x^3-3x^2+7x+6 = x^4-3x^3-3x^2+x+6x+6 = x(x^3+1)-3x(x^2-2)-3(x^2-2)$$
$$= x(x^3+1)-3(x^2-2)(x+1)$$

Lecz $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ więc $x(x^3+1)-3(x^2-2)(x+1)=(x+1)\{x^3-x^2+x-3x^2+6\}$

$$=(x+1)\{x^3-4x^2+x+6\} = (x+1)\{x^3-5x^2+x^2+6x-5x+6\}$$
$$=(x+1)\{x^2(x+1)-5x(x+1)+6(x+1)\}$$
$$=(x+1)^2\{x^2-5x+6\} = (x+1)^2\{x^2-2x-3x+6\}$$
$$=(x+1)^2\{x(x-2)-3(x-2)\} = (x+1)^2(x-2)(x-3)$$

przeto $x^4-3x^3-3x^2+7x+6 = (x+1)^2(x-2)(x-3)$

Według więc tego co się wyżej powiedziało, -1 jest potrójnym, $+2$ podwójnym i 3 także podwójnym pierwiastkiem równania założonego tak że $x^7-7x^6+10x^5+22x^4-43x^3-35x^2+48x+36=(x+1)^3(x-2)^2(x-3)^2$

Oprócz tedy trojakiego gatunku pierwiastków równych, równanie podane nie ma innych.

W tém poszukiwaniu pierwiastków równych, najtrudniejszém jest rozłożenie znalezionego wspólnego największego dzielnika na czynniki dwumianowe, atoli i to sobie ułatwić można stosując do rzeczonego dzielnika, uważanego jako wielomian nowego równania, toż samo postępowanie, t.j. szukając czyli to nowe równanie ma lub nie pierwiastki równe. W naszym przykładzie szukać nam potrzeba czyli równanie $x^4-3x^3-3x^2+7x+6=0$ ma pierwiastki równe lub nie? Nakoniec szukając wspólnego największego dzielnika wielomianów $x^4-3x^3-3x^2+7x+6$ i $4x^3-9x^2-6x+7$, znajdziemy rzeczywiście że takowy jest $x+1$ skąd będzie $x^4-3x^3-3x^2+7x+6=(x+1)(x^3-4x^2+x+6)$

$$=(x+1)\{x^3-2x^2-2x^2+4x-3x+6\}=(x+1)\{x^2(x-2)-2x(x-2)-3(x-2)\}=(x+1)(x-2)\{x^2-2x-3\}$$
$$=(x+1)(x-2)\{x^2-3x+x-3\}=(x+1)(x-2)\{x(x-3)+(x-3)\}=(x+1)(x-2)\{(x-3)(x+1)\}=(x+1)^2(x-2)(x-3)$$

jak wyżej.‡

(*) Przepisch szczegółowiej jasno i dokładnie znajdzie jej się ten przedmiot w Algebrze Bourdona, stron. 391 wydanie 8e 1837 r.

[¹] t.j. cztery razy powtórzonym

‡ Dla znalezienia pierwiastków równych z największego wspólnego dzielnika, można też, zrównawszy go do zera, rozwiązać to równanie jeśli czwartego stopnia nie przewyższa.

§22. Poznawszy tedy, jako w poprzednich §§fach wskazaném zostało, że podane do rozwiązania zrównanie ma pierwiastki całkowite i ułamkowe, a zatém wymierne, oraz pierwiastki równe, takowe na zasadzie podanych twierdzeń i przerobień wynaleźć można. Skoro zaś wielomian podanego zrównania podzieli się przez iloczyn czynników pierwiastkowych, pochodzących ze znalezionych całkowitych, ułamkowych i równych pierwiastków, otrzyma się iloraz, który zrównany do zera, da nam zrównanie mające same pierwiastki niewymierne (urojone, jeżeli w ogólności to zrównanie ma pierwiastki urojone.) Żeby na samo spojrzenie na zrównanie, można poznać czy też ma pierwiastki wymierne lub nie, bo na rozpoznanie całkowitych już sposób podało w §18 i 19, posłużyć może następujące twierdzenie

Zrównanie w którém współczynnik najwyższej potęgi jest 1, a wszystkie inne współczynniki liczbami całkowitemi, niemoże mieć pierwiastka ułamkowego wymiernego. Dowód tego twierdzenia jest nader łatwym. Niech bowiem takiem zrównaniem będzie $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Przypuściwszy, jak to być może, że $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem tego zrównania gdzie p i q są liczbami całkowitemi między sobą pierwszemi, tedy być powinno

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2}\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + a_{n-3}\frac{p^{n-3}}{q^{n-3}} + \dots + a_3\frac{p^3}{q^3} + a_2\frac{p^2}{q^2} + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Rozmnożywszy to zrównanie przez q^{n-1}, otrzymamy:

$$\frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}qp^{n-2} + a_{n-3}q^2p^{n-3} + \dots + a_3q^{n-4}p^3 + a_2q^{n-3}p^2 + a_1q^{n-2}p + a_0q^{n-1} = 0$$

skąd $\frac{p^n}{q} = -(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}qp^{n-2} + \dots + a_3q^{n-4}p^3 + a_2q^{n-3}p^2 + a_1q^{n-2}p + a_0q^{n-1})$

Druga strona tego zrównania jest liczbą całkowitą, przeto i pierwsza takąż być powinna. Ponieważ jednak p i q są między sobą pierwszemi, więc żadna potęga p^n nie może być podzielną przez q. Jest więc pierwsza strona prawo ułamkową. A że liczba ułamkowa niemoże się równać całkowitej, oczywiście przeto zrównanie utrzymać się nie może, a następnie i przypuszczenie, że wymierny ułamek $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem zrównania $f(x)=0$ jest także fałszywém. Jest przeto dowiedzioną prawdą że zrównanie założonemu podobne, nie może mieć żadnego wymiernego pierwiastka.

F §23. Poprzedzające §§fy doprowadzą nas więc w każdym razie do tego, że będziemy mieć do czynienia tylko ze zrównaniami których pierwiastki są wprawdzie rzeczywiste ale niewymierne oraz urojone. Że zaś jak wspomnieliśmy, z urojonych pierwiastków rzeczywistej korzyści dotąd nie poznano, dlatego w dalszym ciągu zatrudnimy się tylko pierwiastkami rzeczywistemi, a o urojonych powie się tylko że się rzeczywiście znajdują lub nie.

Szukanie niewymiernych pierwiastków byłoby bardzo trudném gdyby nam §12 nie wskazywał do tego ułatwienia, mianowicie gdzie i pomiędzy jakiemi liczbami szukać potrzeba tychże pierwiastków. Atoli, nawet do tego ułatwienia czekałaby nas jeszcze często bardzo długa a mozolna praca, gdyby Matematycy nie byli podali sposobów ułatwiających tę pracę. Najwaźniejszym sposobem jest znaleźć tak nazwane granice pierwiastków tak dodatnych jako i odjemnych. Granicą zaś pierwiastków dodatnych nazywamy liczbę całkowitą najwięcej o 1 większą niż pierwiastek największy dodatny; a granicą pierwiastków odjemnych jest liczba całkowita o 1 mniejsza, uważając względnie, albo liczba odjemna najwięcej o jedność większa niż pierwiastek największy odjemny. Te granice nazywamy zwyczajnie wyższemi, i w wielu przypadkach są wystarczającemi biorąc za granicę między dodatnemi i odjemnemi pierwiastkami zero. Atoli jest też wiele przypadków, że zero byłoby zazbyt odległą granicą i musielibyśmy poszukać innych tak dla pierwszych jako i drugich pierwiastków. Te nowe granice nazywają się niższemi. Niższą granicą pierwiastków dodatnych jest liczba całkowita o jedność najwięcej mniejsza, niż najmniejszy pierwiastek dodatny; niższą zaś granicą pierwiastków odjemnych jest liczba całkowita ale odjemna o jedność mniejsza niż najmniejszy pierwiastek odjemny.

F. Nie będzie tu może zbytecznem podać dowód ^tego twierdzenia podany^ przez Emila Mathieu dla ogólniejszego zrównania, bo dla zrównania $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, że takowe nie ma pierwiastków wymiernych 1° jeżeli a_n i a_0 są liczbami nieparzystemi a jedna z liczb $f(1)$ i $f(-1)$ jest także nieparzystą. 2° jeżeli żadna ze czterech liczb a_n, a_0, $f(1)$ i $f(-1)$ nie jest podzielną przez 3. Rzeczony dowód jest następujący.

Niech $\frac{p}{q}$ będzie pierwiastkiem ułamkowym zrównania $f(x) = 0$, gdzie p i q są liczbami całkowitemi między sobą pierwszemi. Przez czynnik pierwiastkowy $x - \frac{p}{q}$ podzielmy wielomian $f(x)$, a iloraz oznaczywszy przez $\varphi(x)$, będzie $f(x) = \left(x - \frac{p}{q}\right)\varphi(x)$, gdzie

$$\varphi(x) = a_n x^{n-1} + \left(\frac{a_n p}{q} + a_{n-1}\right) x^{n-2} + \left(\frac{a_n p^2}{q^2} + \frac{a_{n-1} p}{q} + a_{n-2}\right) x^{n-3} + \left(\frac{a_n p^3}{q^3} + \frac{a_{n-1} p^2}{q^2} + \frac{a_{n-2} p}{q} + a_{n-3}\right) x^{n-4} + \dots + \frac{a_n p^{n-1}}{q^{n-1}} + \frac{a_{n-1} p^{n-2}}{q^{n-2}} + \frac{a_{n-2} p^{n-3}}{q^{n-3}} + \dots + \frac{a_1 p}{q} + a_0$$

Połóżmy $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{q^{n-1}}$ gdzie oczywiście $\psi(x) = a_n q^{n-1} x^{n-1} + \left(a_n p q^{n-2} + a_{n-1} q^{n-1}\right) x^{n-2} + \left(a_n p^2 q^{n-3} + a_{n-1} p q^{n-2} + a_{n-2} q^{n-1}\right) x^{n-3} + \dots$

jest wielomianem którego współczynniki mnożące różne potęgi ilości x, są liczbami całkowitemi, tedy też będzie $f(x) = \left(x - \frac{p}{q}\right) \frac{\psi(x)}{q^{n-1}}$. Położywszy liczbę całkowitą α za x, będzie także $f(\alpha) = \frac{(q\alpha - p)\psi(\alpha)}{q^n}$ skąd $\psi(\alpha) = \frac{q^n f(\alpha)}{q\alpha - p}$. Pierwsza strona tego zrównania jest liczbą całkowitą i druga przeto także być musi ~~[illegible]~~. Lecz gdyby jakakolwiek liczba pierwsza dzieliła dokładnie q^n dzieliłaby też musiała q, byłaby więc pierwszą względem p, bo p i q są pierwszemi między sobą, a następnie nie mogłaby podzielić dokładnie $q\alpha - p$. Jest więc pewną rzeczą że q^n nie jest podzielną przez $q\alpha - p$, przeto $\frac{f(\alpha)}{q\alpha - p}$ musi być liczbą całkowitą. Położywszy w tem wyrażeniu $0, 1, -1$ za α, znajdziemy trzy wypadki odpowiednio $\frac{a_0}{p}$, $\frac{f(1)}{q-p}$ i $\frac{f(-1)}{q+p}$ które będą liczbami całkowitemi. Ponieważ zaś $\frac{p}{q}$ jest ~~[illegible]~~ pierwiastkiem zrównania $f(x) = 0$, zatem kiedy $\frac{a_0}{p}$ jest liczbą całkowitą, być też takąż liczbą musi $\frac{a_n}{q}$ w zrównaniu ostatniem.

Stosownie do tego wywodu, jeżeli a_n i a_0 jako wielokrotne liczb q i p są nieparzystemi liczbami, muszą też być q i p również nieparzystemi, a następnie $q-p$ i $q+p$, jako też $f(1)$ i $f(-1)$ będą liczbami parzystemi.

Jeżeli zatém a_n i a_0 są nieparzystemi i jedna z liczb $f(1)$ i $f(-1)$ także nieparzystą, podane zrównanie nie może mieć pierwiastków ułamkowych, rozumie się wymiernych. Ponieważ zaś ten sam będzie dowód gdy położymy $q=1$, zatém trafimy na przypadek pierwiastków całkowitych że też zrównanie $f(x)=0$ nie może mieć pierwiastków całkowitych, jeżeli a_n i a_0 oraz jedna z liczb $f(1)$ i $f(-1)$ są nieparzystemi; a to jest twierdzeniem Gaussa §18.

Przypuśćmy powtóre że a_n i a_0 nie są podzielnemi przez 3, tedy także p i q nie będą podzielnemi przez 3; dlatego położyć możemy $p=3r\pm1$, $q=3s\pm1$ zkąd widzimy że jedna z liczb $q-p$ i $q+p$ podzielną będzie przez 3, a następnie i jedna z liczb $f(1)$ i $f(-1)$ koniecznie przez 3 podzielną być musi; zkąd wniesiemy że zrównanie $f(x)=0$ nie ma wymiernych pierwiastków, skoro żadna z czterech liczb a_n, a_0, $f(1)$ i $f(-1)$ nie jest podzielną przez 3.

Z całego naszego dowodu wypada wniosek, że zrównanie $f(x)=0$ mające nieparzystą liczbę wyrazów i których współczynniki są liczbami całkowitemi nieparzystemi, nie ma pierwiastków wymiernych.

§24. Może najprostszy a zupełnie pewny sposób znalezienia granicy wyższej pierwiastków równania danego jest[F] następujący: Z danego równania $f(x)$, wyprowadza się według §6 wielomiany pochodne $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ i t. d. $f_n(x)$. Probuje się potem różne liczby całkowite dodatne, rozumie się najmniejszą, która z nich położona zamiast x, uczyni wszystkie te wielomiany t. j. tak pierwotny $f(x)$ jako też i pochodne, dodatnemi, a ta liczba będzie wyższą granicą pierwiastków dodatnych. Przyczyna tego jest następująca: ponieważ według powołanego wyżej §fu, tudzież z §7, wielomiany pochodne, które w nich położymy $x'=h$, są współczynnikami przerobionego równania którego pierwiastki są o h mniejsze niż pierwiastki pierwotnego, t. j. oznaczywszy wyobrażnika pierwiastków przerobionego równania przez x', jest, jako w §7 pokazano $x'=x-h$, zatem jeżeli h jest ową najmniejszą liczbą całkowitą czyniącą wszystkie wielomiany pochodne, a następnie wszystkie współczynniki przerobionego równania dodatnemi, równanie to ostatnie mieć będzie same następstwa znaków, a dlatego według §5. same pierwiastki odjemne. Skoro zaś x jest wyobrażnikiem każdego z pierwiastków równania $f(x)=0$, a według powyższego x' wyobrażnikiem pierwiastków równania $f(x')=0$, a to x' jest odjemne, więc naturalnie być musi $h > x$ t. j. liczba h czyniąca wszystkie wielomiany dodatnemi, jest większą od każdego pierwiastka dodatnego, równania $f(x)=0$; jest przeto, taż liczba h według poprzedzającego §fu, granicą pierwiastków dodatnych tegoż równania.

Te dobrze zrozumiawszy nietrudniej przyjdzie jak znaleźć granicę wyższą pierwiastków odjemnych, potrzeba bowiem tylko według §5. przemienić znaki wyrazów stojących na miejscach parzystych na przeciwne, przez co przerobimy równanie $f(x)=0$ na inne którego dodatne pierwiastki są odjemnemi pierwszego. Szuka się, więc znowu granicy wyższej pierwiastków dodatnych tego przerobionego, ~~równania~~ a ta będzie wyższą granicą pierwiastków odjemnych pierwszego równania.

Wspomniona powyższa proba rozpoczyna się od ostatnich wielomianów i postępuje w górę. Skoro probowana liczba nie czyni którego z nich wielomianów dodatnym, przechodzi się do liczby o 1 większej i nie probuje się już wielomianów niższych ale tylko następujących wyższych.

Weźmy tu za przykład równanie §20.

$$f(x) = 12x^6+7x^5-116x^4+6x^3+258x^2-81x-54$$
$$f_1(x) = 72x^5+35x^4-464x^3+18x^2+516x-81$$
$$f_2(x) = 180x^4+70x^3-696x^2+18x+258$$
$$f_3(x) = 240x^3+70x^2-464x+6$$
$$f_4(x) = 180x^2+35x-116$$
$$f_5(x) = 36x+7$$
$$f_6(x) = 12$$

Dla $x=1$, wielomiany $f_5(x)$ i $f_4(x)$ ~~jest~~ są dodatnemi, lecz następny $f_3(x)$ jest odjemnym; biorę więc $x=2$, ta liczba czyni wielomiany $f_3(x)$, $f_2(x)$ i $f_1(x)$ dodatnemi a $f(x)$ zero, przeto ~~ta~~ liczba 2 jest pierwiastkiem równania. Gdyby liczba 2 nie czyniła wielomianu $f(x)$ zero ale dodatnym, byłaby ona granicą pierwiastków dodatnych; gdyby zaś wielomian $f(x)$ czyniła odjemnym, potrzebaby wziąć $x=3$ która liczba czyniłaby pewno i wielomian rzeczony dodatnym i byłaby granicą szukaną pierwiastków dodatnych.

Weźmy teraz przerobione równanie

$$f(x) = 12x^6-7x^5-116x^4-6x^3+258x^2+81x-54$$

i szukajmy zupełnie tym samym sposobem granicy wyższej pierwiastków dodatnych, ta będzie granicą odjemnych pierwszego równania. Tu byśmy także znalazło że $x=3$, czyni wielomian ostatniego równania zero, skąd byśmy wnieśli że $x=-3$ jest pierwiastkiem danego równania. Z tego rachunku przekonalibyśmy się także, że pierwiastki założonego równania zawarte są w ścisłych granicach, mianowicie odjemne między 0 i -4 a dodatne między 0 i $+3$ biorąc granicę o 1 dalszą niż same pierwiastki jakie napotkaliśmy.

[F] najdawniejszy, bo jeszcze przez Newtona podany, a ten jest

F. Widzimy tu także że niezwolniwszy wprzód podanego równania od pierwiastków całkowitych, dokonać wyśledzić można przy poszukiwaniu granic pierwiastków.

F →

Równanie

$$f(x) = 858x^7 - 3003x^6 + 4158x^5 - 2887{\cdot}5x^4 + 1050x^3 - 189x^2 + 14x - 0{\cdot}25 = 0$$

ponieważ ma same przemiany znaków, ma też według twierdzenia Des. ta same pierwiastki dodatnie. Jakaż jest granica wyższa tych pierwiastków? Postępując jak w poprzednim przykładzie, znajdziemy że $x = 1$ czyni wszystkie wielomiany dodatnemi, więc 1 jest granicą wyższą pierwiastków, to znaczy że jeżeli wszystkie są rzeczywiste, znajdują się między 0 i 1. Tu się pokazuje że chociaż takie proste granice jednakże nie wystarczają do znalezienia pierwiastków i przyjdzie jeszcze szukać nowych, do czego posłużyć może twierdzenie §12.

F → Aby znaleźć niższą granicę pierwiastków dodatnich równania $f(x)=0$, dosyć jest, ażeby równanie przerobić na inne kładąc $x = \frac{1}{x'}$, przez co, jak widzimy, pierwiastki przerobionego będą odwrotnemi pierwszego równania t.j. całkowite staną się mianownikami ułamków których liczniki są $=1$, a zaś ułamkowe będą odwrócone tak że liczniki będą mianownikami a te ostatnie licznikami pierwiastków ułamkowych przerobionego równania. Po takiem przerobieniu, szuka się jak wyżej granic wyższych tak pierwiastków dodatnich jako i odjemnych przerobionego równania, a po ich znalezieniu dzieli się 1 przez każdą granicę i otrzymuje się ilorazy które są granicami niższemi dodatnich i odjemnych pierwiastków. Wyraźniej mówiąc: oznaczywszy przez G i G' wyższe granice pierwiastków dodatnich i odjemnych przerobionego równania $f(x')=0$, niższemi granicami pierwiastków równania $f(x)=0$ będą $\frac{1}{G}$ i $\frac{1}{G'}$ pierwsza dodatnich a druga odjemnych.

Przerobienie powyższe równania $f(x)=0$ na $f(x')=0$, nie potrzebuje żadnego rachunku jak się z następującego przekonać można. Kładąc $\frac{1}{x'}$ za x w równaniu $f(x)=0$, mamy

$$f(x') = \frac{1}{x'^n} + a_{n-1}\frac{1}{x'^{n-1}} + a_{n-2}\frac{1}{x'^{n-2}} + a_{n-3}\frac{1}{x'^{n-3}} + \dots + a_3\frac{1}{x'^3} + a_2\frac{1}{x'^2} + a_1\frac{1}{x'} + a_0 = 0$$

albo

$$f(x') = a_0x'^n + a_1x'^{n-1} + a_2x'^{n-2} + a_3x'^{n-3} + \dots + a_{n-3}x'^3 + a_{n-2}x'^2 + a_{n-1}x' + 1 = 0$$

z którego widzimy że aby otrzymać przerobione równanie którego by pierwiastki były odwrotnemi pierwszego, dosyć jest napisać współczynniki od ostatniego w odwrotnym porządku przy potęgach rosnących ilości niewiadomej, odmieniając zarazem w całem równaniu znaki na przeciwne jeżeli w równaniu $f(x)=0$ ostatni wyraz był odjemny.

Tak np. szukając granic wyższych i niższych pierwiastków równania

7 $$f(x) = x^6 - 6x^5 - 13x^4 + 84x^3 - 13x^2 - 6x + 1 = 0$$

znajdziemy wyższe granice sposobem wyżej wskazanym $+6$ i -4.

Przerobione równanie będzie

$$f(x') = x^6 - 6x^5 - 13x^4 + 84x^3 - 13x^2 - 6x + 1 = 0$$

którego pierwiastków granice wyższe są równe $+6$ i -4 z powodu że to jest szczególny gatunek równań w których współczynniki jednakowo od początku i końca odległe są sobie równe i z temiż samemi znakami, dlatego przerobione jest zupełnie tem samem co pierwotne.

Mając wyższe granice przerobionego równania, mianowicie $G = +6$, $G' = -4$, niższe granice tychże pierwiastków oznaczając odpowiednio przez g i g' będzie $g = +\frac{1}{6} = 0{\cdot}17$ biorąc na iloraz cyfrę 7 jako bliższą, $g' = -\frac{1}{4} = -0{\cdot}25$. Żaden przeto pierwiastek dodatni nie jest większym niż 6, ani mniejszym od $0{\cdot}17$ ani żaden odjemny mniejszym niż $-0{\cdot}25$. Za pomocą wskazać się mających niżej sposobów znalezienia pierwiastków równań danego, wynajdzie się też przybliżone pierwiastki dla powyższego równania jak następuje:

dodatnie: $0{\cdot}26795$, $0{\cdot}17157$, $3{\cdot}73205$, $5{\cdot}82843$

odjemne: $-0{\cdot}26795$, $-3{\cdot}73205$

które usprawiedliwiają wyżej znalezione granice.

0
waży nie ma
pierwiastków dodatnich,
znalezienia zaś gra-
olarało, znajdziemy
=0
, dostrzeżemy, że
wszystkie dodatnie
znali chcemy
mniejszych niż
wszystkich wielo-
tysamy że takim
. Wszystkie więc
jest wystarczy dosyć
że pierwszy najmniejszy
a ostatni największy

F Chcąc wykryć prawdziwe granice każdego z siedmiu pierwiastków, nie można tu inaczej postąpić jak położyć za x wartości przypadające w oznaczonych granicach, mianowicie potrzeba za x wartości 0, 0'1, 0'2, 0'3 .... 0'9, 1. Szukając wypadków sposobem wyłożonym w §8, znajdziemy

0)	858	−3003	+4158	−2887'5	+1050	−189	+14	−0'25	= f(0)
0'1)	858	−2917'2	+3866'28	−2500'872	+799'9128	−109'00872	+3'099128	+0'0599128	= f(0'1)
0'2)	858	−2831'4	+3591'72	−2169'156	+616'1688	−65'76624	+0'846752	−0'0806496	= f(0'2)
0'3)	858	−2745'6	+3334'32	−1887'204	+483'8388	−43'84834	+0'845498	+0'0036494	= f(0'3)
0'4)	858	−2659'8	+3094'08	−1649'868	+390'0528	−32'97888	+0'808448	+0'0733792	= f(0'4)
0'5)	858	−2574	+2871	−1452	+324	−27	+0'5	0	= f(0'5)
0'6)	858	−2488'2	+2665'08	−1288'452	+276'9288	−22'84272	+0'294368	−0'0733792	= f(0'6)
0'7)	858	−2402'4	+2476'32	−1154'076	+242'1468	−19'49724	+0'351932	−0'0036476	= f(0'7)
0'8)	858	−2316'6	+2304'72	−1043'724	+215'0208	−16'98336	+0'413312	+0'0806496	= f(0'8)
0'9)	858	−2230'8	+2150'28	−952'248	+192'9768	−15'32088	+0'211208	−0'0599128	= f(0'9)
1)	858	−2145	+2013	−874'5	+175'5	−13'5	+0'5	+0'25	= f(1)

Z tych podstawień widzimy że wszystkie siedm pierwiastków są rzetelnemi; teraz zaś: najmniejszy między 0 i 0'1, po nim następujący między 0'1 i 0'2, dalszy między 0'2 i 0'3, czwarty jest = 0'5, piąty leży między 0'7 i 0'8, szósty między 0'8 i 0'9 a siódmy między 0'9 i 1. Tym sposobem każdy mamy znany już na $\frac{1}{10}$ blisko, zatem według podać się mającego sposobu Newtona, każdy łatwo obrachować w żądanej liczbie cyfer dziesiętnych.

7

$$f(x) = x^4 - 19'4x^3 + 138'41x^2 - 429'664x + 488'448 = 0$$

ponieważ to zrównanie ma same przemiany znaków i z tego powodu nie ma pierwiastków odjemnych, zatem szukając wyższej granicy pierwiastków dodatnich, znajdziemy ją sposobem poprzednio wskazanym = 7. Dla znalezienia zaś granicy niższej przerobiwszy to zrównanie, jak się co dopiero pokazało, znajdziemy je

$$f(x') = 488'448x^4 - 429'664x^3 + 138'41x^2 - 19'4x + 1 = 0$$

Szukając tu granicy wyższej ~~tego~~ pierwiastków tego zrównania, dostrzeżemy po wyprowadzeniu wielomianów pochodnych, że $x=1$ czyni wszystkie dodatnie, zniżej więc byłoby $G=1$ a następnie $g=\frac{1}{G}=\frac{1}{1}=1$. Jeżeli jednak chcemy oznaczyć dokładnie granicę niższą, tedy potrzeba spróbować liczb mniejszych niż 1 t.j. ułamków $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ... czyli który z nich nie czyni wszystkich wielomianów pochodnych dodatnimi. Na tej drodze znaleźlibyśmy że takim ułamkiem jest $\frac{1}{3}$ t.j. że $G=\frac{1}{3}$, przeto $g=\frac{1}{G}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$. Wszystkie więc cztery pierwiastki podanego zrównania leżą między 3 i 7. Aby je wyszukać dosyć położyć za x liczby 3, 4, 5, 6, 7, a z tego podstawienia pokaże się że pierwszy najmniejszy pierwiastek leży między 3 i 4, drugi między 4 i 5, trzeci między 5 i 6 a ostatni największy między 6 i 7.

Jeżeli nie chcemy bardzo dokładnie znaleźć granicy wyższej pierwiastków dodatnich, szczególniej też gdy współczynniki równania nie są wielkiemi liczbami, tedy często bardzo prędko takową granicę znaleźć możemy. Powiedziało się bowiem w §13. że największy współczynnik równania a_m powiększony jednością, daje nam liczbę która położona za niewiadomą x czyni pierwszy wyraz wielomianu $f(x)$, większym niż suma wszystkich innych, a zatém i cały wielomian dodatnym, co też o każdej liczbie większej niż a_m+1 rozumieć należy. Ta zatem liczba będzie granicą wyższą pierwiastków dodatnich równania $f(x)=0$. ~~Jak się~~ Będzie ona też granicą wyższą pierwiastków odjemnych. Te atoli granice w najwięcej przypadkach będą zbyt oddalone. Daleko bliższą wyższą granicę pierwiastków dodatnich znaleźć można równie prędko następującym sposobem. Oznaczywszy przez x^{n-m} potęgę ilości niewiadomej równania $f(x)=0$ odpowiadającą pierwszemu odjemnemu wyrazowi w wielomianie $f(x)$, tudzież przez R największy współczynnik odjemny tegoż wielomianu, tedy $\sqrt[m]{R}+1$ będzie liczbą czyniącą wielomian $f(x)$ dodatnym nawet wtedy gdyby po pierwszym wyrazie odjemnym wszystkie następne były takiemiż. Po dowód tej prawdy jakkolwiek bardzo łatwy, odsyłam do Algebry Bourdona na stronicy 433 wydanie już poprzednio powołane. Za przykład niech posłuży ~~ust~~ równanie

$$f(x) = x^4+11x^2-25x-67=0$$

w którém $R=67$, ~~$n-m=4+1=3$, zatém~~ $n-m=1$, zkąd $m=n-1=4-1=3$
zatém $\sqrt[m]{R}+1 = \sqrt[3]{67}+1 = 5+1 = 6$ jest granicą pierwiastków dodatnich. Wzięto się tu $\sqrt[3]{67}=5$, bo się za granice biorą w takim razie zawsze liczby całkowite a trzeci pierwiastek z liczby 67 jest większy niż 4. Według pierwszego sposobu, ponieważ $a_m=67$, granicą pierwiastków dodatnich byłaby liczba $a_m+1=68$ która o bardzo wiele jest odległą od powyższej 6. Często można znaleźć zapomocą przekształcenia równania danego jeszcze bliższą granicę, czego wprawa i ćwiczenie się łatwo nauczy. Tak np. równanie $x^5+7x^4-12x^3-49x^2+52x-13=0$ napisawszy następnie $x^2(x^3-49)+7x^3(x-\frac{12}{7})+52(x-\frac{1}{4})=0$ widzimy że położywszy $x=\sqrt[3]{49}=4$, wielomian równania tak dla tej liczby jako też i każdej większej będzie zawsze dodatnym. Jest więc liczba 4 granicą wyższą pierwiastków dodatnich, gdy pierwszym sposobem znaleźlibyśmy za takową liczbę $52+1=53$ a drugim sposobem $\sqrt{49}+1=8$.

§25. Umiejąc znaleźć granice pierwiastków tak dodatnich jak odjemnych, wspomnione w §20 próbowanie dzielników ostatniego wyrazu równania, w szukaniu pierwiastków całkowitych, skróci często całą robotę więcej niż o połowę. Z pomiędzy bowiem rzeczonych dzielników, te tylko poddać należy próbie które się znajdują w znalezionych granicach, gdyż leżące za granicami, nie mogą być pierwiastkami równania. Tak np. mając do rozwiązania równanie $x^4+3x^3-31x^2-63x+90=0$ i przekonawszy się na zasadzie §19. że ma pierwiastki całkowite, szuka się naprzód granic wyższych tak dodatnich jako i odjemnych pierwiastków. Pierwszych znajdziemy granicę, według krótszego sposobu $\sqrt{90}+1=10+1=11$. Przerobionego zaś równania $x^4-3x^3-31x^2+63x+90=0$ granica pierwiastków dodatnich a zatém odjemnych równania założonego, byłaby $90+1=91$ która jest bardzo daleką. Lepiej więc szukać dokładniejszej granicy sposobem Newtona, dlatego będzie

$$f(x) = x^4-3x^3-31x^2+63x+90$$
$$f_1(x) = 4x^3-9x^2-62x+63$$
$$f_2(x) = 6x^2-9x-31$$
$$f_3(x) = 4x-3$$
$$f_4(x) = 1$$

Z tego wypada że liczba 6 jest pierwiastkiem ostatniego równania oraz uwa-
zać

uważać je można, a czwartą liczbę 7 za granicę dodatnich pierwiastków ostatniego a pierwiastków odjemnych pierwszego zrównania. Widząc już że granicami pierwiastków założonego zrównania są −7 i +11, potrzeba znaleźć dokładne dzielniki ostatniego wyrazu zrównania t. j. liczby 90. Te znajdziemy wiadomym z Arytmetyki sposobem 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90. A odrzuciwszy wszystkie po za granicami leżące, pozostają do próby 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10. Że już znaleźliśmy że −6 jest pierwiastkiem podanego zrównania, przeto probujemy naprzód 1

1)	1	+3	−31	−63	+90
		+4	−27	−90	0 przeto $x=1$ jest pierwiastkiem
2)		+5	−21	−105	−121 −2 nie jest pierwiastkiem
3)		+6	−13	−102	−216 3 " "
5)		+8	+9	−18	0 5 jest pierwiastkiem

Probując dalej 6, 9, 10, znajdziemy że żadna z tych liczb nie jest pierwiastkiem, lecz w naszem zrównaniu mamy dwa następstwa i dwie zmiany znaków, ma przeto to zrównanie dwa odjemne i dwa dodatnie pierwiastki. Te ostatnie co dopiero znaleźliśmy $x_1=1$, $x_2=5$. Że też już jeden znaleźliśmy $x_3=-6$, więc nam pozostaje do znalezienia tylko jeden pierwiastek odjemny. Spróbujmy zaraz −1

−1)	1	+3	−31	−63	+90
		+2	−33	−30	+120 przeto $x=-1$ nie jest pierwiastkiem
−2)		+1	−33	+3	+84 − − −2 " "
−3)		0	−31	+30	0 − − − −3 jest pierwiastkiem

Czwartym więc nareszcie pierwiastkiem założonego zrównania jest $x_4=-$

Rozumiem że każdy pojmuje jak sobie w każdym innym przypadku postąpić należy i dlatego nie sądzę za potrzebne więcej przytaczać przykładów.

Jeżeli się na wskazanej drodze nie odkryło wszystkich pierwiastków, tedy najlepiej się postąpi dzieląc wielomian zrównania przez iloczyn pierwiastkowych czynników, znalezionych już pierwiastków, a potem zrównawszy iloraz ze zerem postąpić z nowem zrównaniem tymże samym sposobem. Nie odkrywszy dwóch tylko pierwiastków, można mniemać że te są urojonemi; ale je też i znaleźć łatwo bo przez znalezione pierwiastki można zrównanie zniżyć do drugiego stopnia, które w każdym razie zamierzony rozwiązać. Może też być że są które przypadki iż zrównanie ma pierwiastki równe czyli powtórzone i dlatego probując raz tylko każdego z dzielników ostatniego wyrazu, odkrywamy tylko jeden z równych pierwiastków. Atoli §21. uczy nas jak się o tem zapewnić.

(Zręczne spólne ćwiczenie się w rozwiązywaniu zrównań, nastręczy z pewnością inne krótsze a zatem praktyczniejsze sposoby.

II

§26. Po przygotowaniu wszystkiego co nam może być koniecznem, przystępuję nareszcie do wyłożenia znakomitszych, jedynym z podać się mających sposobów rozwiązania* zrównania, nie wdając się tu ani w rozwiązania trygonometryczne, ani też w te w których użyto teoryi linij krzywych lub rachunku wyższego, ale jedynie

* o tych mówić będę, które obrały drogę czysto algebraiczną.

Pierwszym i najdawniejszym jest

Sposób Newtona

polega on na tem, że znalazłszy na zasadzie §12 dwie liczby całkowite które położone za x w wielomianie zrównania dają wypadki ze znakami przeciwnemi, zkąd wnioskujemy że między temi liczbami znajduje się przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty zrównania,

się szukamy téż granicy, kładzie się za x pośrednią liczbę, która naturalnie będzie liczbą mniejszą pomnożoną za tem liczbą dziesiętnym.*) Tak np. jeżeli pierwsze dwa podstawienia, które wydały wypadki ze znakami przeciwnemi były a i b, bierze się pośrednią liczbę c i tę znowu podstawia za x. Jeżeli wypadek z podstawienia c będzie z tym samym znakiem jak wypadł z podstawienia a, będzie to dowodem, że pierwiastek leży między c i b; w przeciwnym razie, między a i c. Ścieśniające te granice dalej, kładzie się za x pośrednia liczba pomiędzy a i c lub téż pomiędzy c i b. To podstawianie liczb pośrednich dopóty się odbywa, dopóki nie znajdziemy dwóch podstawień różniących się tylko o $\frac{1}{10}$, bo pod tym warunkiem nauczył Newton wynaleźć przybliżonym sposobem dalsze cyfry dziesiętne pierwiastku, skoro pierwsza jest już znana. Sposób ten jest następujący. Niech będzie dane do rozwiązania równanie $f(x) = 0$; za pomocą powyższego podstawiania znalazło się już pierwiastek $x = p$ w jednej cyfrze dziesiętnej prawdziwy, albo jak się zwyczajnie mówi, na $\frac{1}{10}$ przybliżony. Oznaczywszy więc przez α to co brakuje przybliżonemu pierwiastkowi p do prawdziwego, będzie $x = p + \alpha$. Położywszy teraz w wielomianie $f(x)$ $p+\alpha$ za x i uporządkowawszy równanie według rosnących potęg ilości α, według § 6 lub 7 będzie

$$f(p+\alpha) = f(p) + \alpha f_1(p) + \alpha^2 f_2(p) + \alpha^3 f_3(p) + \dots \quad = 0$$

bo $p+\alpha$ jest prawdziwym pierwiastkiem równania. W tém równaniu jest $f(p)$ pierwotnym wielomianem równania, skoro w nim położy się p za x, zaś $f_1(p)$, $f_2(p)$, $f_3(p)$ i t. d. są wielomianami pochodnemi. Ponieważ $\alpha < \frac{1}{10}$, bo pierwsza cyfra dziesiętna w p jest pewną, zatém $\alpha^2 < \frac{1}{100}$, $\alpha^3 < \frac{1}{1000}$ i t. d. chcąc się przeto tylko zbliżyć do prawdziwego pierwiastku, możemy zaniedbać wszystkie następne wyrazy poczynając od $\alpha^2 f_2(p)$, a w takim razie znajdziemy

$$f(p) + \alpha f_1(p) = 0 \quad \text{ztąd} \quad \alpha = -\frac{f(p)}{f_1(p)}$$

Obrachowawszy ważność α np. w trzech cyfrach dziesiętnych, otrzymamy pierwiastek bliższy prawdziwego niż p t. j. $p+\alpha$ który oznaczywszy przez p' a nową poprawkę przez α', będzie $p'+\alpha'$ pierwiastkiem bliższym prawdziwego niż p'.**) Aby poprawkę α' obrachować, dosyć jest w powyższej ważności położyć p' za p, a otrzymamy $\alpha' = -\frac{f(p')}{f_1(p')}$. Tu rachować już potrzeba ważność α' przynajmniej w sześciu cyfrach dziesiętnych. Dodawszy nową poprawkę α' ze swoim znakiem do p', oznaczymy tę sumę przez p'' a nową poprawkę przez α'', tedy ta nowa poprawka będzie $\alpha'' = -\frac{f(p'')}{f_1(p'')}$ i t. d. Całe to postępowanie najlepiej objaśni przykład.

Niech będzie równanie $f(x) = x^3 + 8x^2 + 6x - 75{\cdot}9 = 0$ które rozwiązać chcemy. Że to równanie ma z pewnością jeden przynajmniej pierwiastek rzeczywisty a ten dodatny, twierdzić możemy na podstawie § 13, dwa zaś inne jeżeli są rzeczywistemi, muszą być odjemne na zasadzie § 16. Szukając granicy wyższej pierwiastków dodatnych, mamy

$$f(x) = x^3 + 8x^2 + 6x - 75{\cdot}9$$
$$f_1(x) = 3x^2 + 16x + 6$$
$$f_2(x) = 3x + 8$$
$$f_3(x) = 1$$

z czego się przekonamy że $x = 3$ czyni wszystkie te wielomiany dodatnemi a zatem że też liczba 3 jest granicą wyższą pierwiastków dodatnych. Ponieważ ~~dodatna~~ ta granica bardzo jest blizką zera, niepotrzebnie więc jest szukanie niższej granicy, ale za takową wziąć należy zero.

*) Jeżeli pierwsze podstawienia trafiły się były na o jedności, będzie zaś liczba całkowita, jeżeli zaś owe podstawienia różniły się o kilka lub kilkanaście jedności.

**) zaś $p'+\alpha'$ znowu bliższą niż p' ważności prawdziwego pierwiastku.

Położywszy teraz 0, 1, 2, 3 ~~za~~ x znajdziemy

	1	+8	+6	−75·9 = f(0)
1)		+9	+15	−60·9 = f(1)
2)		+10	+26	−23·9 = f(2)
3)		+11	+39	+41·1 = f(3)

Szukany przeto pierwiastek leży między 2 i 3. Ścieśniając teraz granice, p[o]łóżmy x = 2·5, tedy będzie

	1	+8	+6	−75·9
2·5)		+10·5	+32·25	+4·725 = f(2·5)

Ponieważ f(2) = −23·9 a f(2·5) = +4·725, więc pierwiastek nasz znajduje się mi[ę]dzy 2 i 2·5. Położywszy dalej x = 2·3 znajdziemy na wypadek f(2·3) = −7[…] pierwiastek przeto leży między 2·3 i 2·5 bo te podstawienia dają wypadki z p[rze]ciwnemi znakami. Kładąc nareszcie x = 2·4, znajdziesz f(2·4) = −1·596. Pon[ie]waż f(2·4) = −1·596 a f(2·5) = +4·725 więc pierwiastek leży między 2·4 i 2·5 i tym sposobem mamy teraz pierwiastek przybliżony na $\frac{1}{10}$. Położywszy teraz x = p+α = 2·4+α, ponieważ f(p) = f(2·4) = −1·596, zaś $f_1(p) = f_1(x)$ [gdy w] […]tu położymy 2·4 za x i stąd znajdziemy $f_1(2·4)$ = +61·68, ~~przeto~~ zatem

$$\alpha = -\frac{f(p)}{f_1(p)} = -\frac{-1·596}{61·68} = +\frac{1·596}{61·68} = 0·026$$

rachując α tylko w trzech cyfrach dziesiętnych. Bliższy przeto pierwiastek prawdziwego, znajdziemy p+α = 2·4+0·026 = 2·426. Szukając nowej poprawki, położym[y] następnie p'+α' = 2·426+α', a kładąc 2·426 za x tak w f(x) jako też i w $f_1(x)$, znajdziemy f(2·426) = +0·017971, $f_1(2·426)$ = +62·472428

a następnie

$$\alpha' = -\frac{f(p')}{f_1(p')} = -\frac{0·017971}{62·472428} = -0·000288,$$

rachując w[…] sześć cyfer dziesiętnych. Bliższym więc pierwiastkiem założonego równan[ia] będzie 2·426−0·000288 = 2·425712 gdzie za pierwsze cztery cyfr[y] ręczyć można że są pewne. Jeżeli się potrzebuje pierwiastka w sześciu [lub] więcej pewnych cyfrach, szukać należy nowej poprawki α'' kładąc p'' = 2·425712. Przeprowadzając ten rachunek, potrzeba tu już rachow[ać] w dziesięciu lub dwunastu cyfrach dziesiętnych. Szukajmy jeszcze t[ej] jednej poprawki. Kładąc x = 2·425712 tak w f(x) jako też w $f_1(x)$ za x znajdziemy f(2·425712) = −0·0000180162, $f_1(2·425712)$ = +62·4636281208

zatem

$$\alpha'' = -\frac{-0·0000180162}{+62·4636281208} = +0·0000002884,$$

a następnie pierwia[s]tek przybliżony którego szukamy jest x = 2·425712+0·0000002884
= 2·4257122884...

Pierwiastek ten jest dokładnym w dziewięciu cyfrach dziesiętnych, po[łoży]wszy bowiem w f(x) = 0 x = 2·4257122884, znajdziemy na wypad[ek] −0·000000001857835.

Jak postąpić należy gdybyśmy chcieli ten pierwiastek mieć jeszcze w więcej cyfrach, jest jasnem.

Chcąc się dowiedzieć czyli dwa inne pierwiastki są rzetelne lub u[ro]jone, weźmy znaleziony tylko w sześciu cyfrach t.j. x = 2·425712 przez czynnik pierwiastkowy x−2·425712 podzielmy wielomian $x^3+8x^2+6x-75·9$ sposobem w §10 podanym, rachując tylko w sze[ściu] dokładnych cyfrach, tedy otrzymamy iloraz

$x^2+10·425712x+31·289775$ i resztę −0·000018 którą uważać m[u]simy za zero, bo pierwiastek uważaliśmy w tym razie za dokładny. Zrównawszy znaleziony iloraz do zero otrzymamy dla dwóch in[nych] pierwiastków równanie $x^2+10·425712x+31·289775=0$ którego na[w]et nie rozwiązując widzimy że dwa jego pierwiastki są urojonemi, b[o] $\{\frac{1}{2}(10·425712)\}^2 = (5·212856)^2 < 31·289775$. Jeżeliby zaś potrzebne były do jakiego celu wyrażenia tych pierwiastków, łatwo je znaleźć z ostatn[iego] równania.

Niechby nam danem było do rozwiązania zrównanie

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 15x + 17 = 0$$

tedy, ponieważ tu są cztery przemiany znaków a jedno tylko następstwo, wniesiemy na zasadzie twierdzenia Dekarta, że pięciu wszystkich pierwiastków są rzeczywistemi, cztery będą dodatnemi a jeden odjemny. Ten odjemny pierwiastek wskazuje nam też także i twierdzenie §13. Szukając granic pierwiastków według §25, znajdziemy je -1 i $+1$. W tych szczupłych granicach leżą zatem wszystkie pierwiastki t. j. dodatne między 0 i 1 a odjemne między -1 i 0. Szukając odjemnego pierwiastka, przerobimy dane zrównanie na inne takie, żeby pierwiastki były z przeciwnemi znakami, tym sposobem ten odjemny pierwiastek będzie dodatnym. Przerobione zrównanie będzie

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 15x - 17 = 0$$

Położywszy tu $x=0$ a potem $x=1$, znajdziemy $f(0)=-17$, $f(1)=+24$. Ścieśniając granice, połóżmy $x=0'5$ a znajdziemy $f(0'5)=-5'40625$; szukany przeto pierwiastek leży między $0'5$ i 1. Połóżmy dalej $x=0'7$ a otrzymamy $f(0'7)=+3'19857$, pierwiastek przeto leży między $0'5$ i $0'7$. Położywszy nareszcie $x=0'6$, otrzymamy $f(0'6)=-1'51424$, szukany przeto pierwiastek leży między $0'6$ i $0'7$ z pierwszym sposobem na to jest znanym. Szukając teraz poprawki wskazanym sposobem, znajdziemy $\alpha = -\frac{f(0'6)}{f_1(0'6)} = +\frac{1'51424}{42'768} = 0'035$, a pierwiastek bliższy prawdziwego $x = 0'6 + 0'035 = 0'635$. Położywszy $x=0'635$, znajdziesz $f(0'635) = +0'033926$ a $f_1(0'635) = +45'730659$. Z temi liczbami będzie następna poprawka $\alpha' = -\frac{0'033926}{45'730659} = -0'000742$ a pierwiastek znowu bliższy prawdziwego $x = 0'635 - 0'000742$
$= 0'634258\ldots$ i t. d.

Pierwiastek zatem rzeczywisty założonego zrównania jest $x = -0'634258\ldots$ który w pięciu cyfrach jest zupełnie pewnym, bo położywszy raz $x=-0'634258$ a potem $x=-0'634257$, otrzymamy wypadki ze znakami przeciwnemi, co pokazuje że ten pierwiastek w sześciu cyfrach $x=-0'634257$ jest dokładnym, bo leży w granicach $-0'634257$ i $-0'634258$.

Aby inne pierwiastki odkryć które według znaków osądziliśmy wszystkie za dodatne i to w granicach 0 i 1, dosyć jest w tychże granicach położyć wartości $0'1, 0'2, 0'3\ldots$ za x a przekonamy się że żaden wypadek nie zmieni znaku ale wszystkie będą dodatne. Że liczba pierwiastków jest parzystą, zatem śmiało wnieść możemy że wszystkie są urojonemi, szczególniej jeśli się przekonaliśmy według §21, że dane zrównanie nie ma pierwiastków równych.

§27. Acz kolwiek wyłożony sposób Newtona rozwiązania zrównań liczbowych stopni wyższych, zwyczajnie sposobem przybliżenia (: methodus approximationis :), wyłącznie nazywany, jest nader łatwym jak to w dwóch powyższych przykładach widzieliśmy, to przecież nie jest zawsze pewnym, tak że w niektórych przypadkach postępując wskazaną drogą, zamiast zbliżania oddalamy się ciągle od prawdziwej wartości pierwiastka. Tę niedokładność rzeczonego sposobu pierwszy dostrzegł Lagrange i dowiódł. Przytaczając tu jego bardzo dowcipny dowód, poprzedzię go mniej następującem przygotowaniem.

Jeśli pierwiastki zrównania n^{tego} stopnia $f(x)=0$ oznaczymy jak zwyczajnie przez $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}, x_n$, to już wiemy że

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(\ldots\ldots)(x-x_{n-1})(x-x_n) = \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\ldots\xi_{n-1}\xi_n$$

kładąc $x-x_1=\xi_1$, $x-x_2=\xi_2$, $x-x_3=\xi_3$ i t. d.

Położywszy w wielomianie $f(x)$, $x=p+\alpha$ i porządkując według wzrastających potęg ilości α, otrzymamy według §7

$$f(p+\alpha)=f(p)+\alpha f_1(p)+\alpha^2 f_2(p)+\alpha^3 f_3(p)+\cdots\cdots$$

Ale też także $f(p+\alpha)=(\xi_1+\alpha)(\xi_2+\alpha)(\xi_3+\alpha)(\cdots\cdots)(\xi_{n-1}+\alpha)(\xi_n+\alpha)$

Wykonawszy tu naznaczone mnożenie i porządkując również według wzrastających potęg α, otrzymamy: $f(p+\alpha)=$

$$(\xi_1\xi_2\xi_3\cdots\xi_n+\xi_2\xi_3\xi_4\cdots\xi_n+\xi_1\xi_3\xi_4\cdots\xi_n+\xi_1\xi_2\xi_4\cdots\xi_n+\cdots\cdots+\xi_1\xi_2\xi_3\cdots\xi_{n-1})\,\alpha+\text{i t.d.}$$

bo wiadomem jest z teoryi mnożenia dwumianów, że współczynnikiem następnych potęg dwumianu są sumy wszystkich F kombinacyi bez powtórzenia, z n elementów, biorąc ich po n, (n−1), (n−2), (n−3) ....{n−(n−2)}, {n−(n−1)}.

Z dwóch tych naraz różnych rozwinięć $f(p+\alpha)$ wypada, że współczynniki mnożące też same potęgi ilości α w obu rozwinięciach są sobie równe, zatem

$$f(p)=\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\cdots\xi_n=(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)(p-x_4)(\cdots\cdots)(p-x_{n-1})(p-x_n)$$

$$f_1(p)=\xi_2\xi_3\xi_4\cdots\xi_n+\xi_1\xi_3\xi_4\cdots\xi_n+\xi_1\xi_2\xi_4\cdots\xi_n+\xi_1\xi_2\xi_3\xi_5\cdots\xi_n+\cdots\xi_1\xi_2\xi_3\cdots\xi_{n-1}$$
$$=(p-x_2)(p-x_3)(p-x_4)(\cdots)(p-x_n)+(p-x_1)(p-x_3)(p-x_4)(\cdots)(p-x_n)+(p-x_1)(p-x_2)(p-x_4)(\cdots)(p-x_n)$$
$$+(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)(p-x_5)(\cdots)(p-x_n)+\text{i tak. i t.d.}$$

To widząc, możemy już przystąpić do dowodu Lagrange'a. Z ostatnich dwóch zrównań wypada

$$\frac{f_1(p)}{f(p)}=\frac{1}{p-x_1}+\frac{1}{p-x_2}+\frac{1}{p-x_3}+\frac{1}{p-x_4}+\cdots\cdots+\frac{1}{p-x_{n-1}}+\frac{1}{p-x_n}$$

Uważając tu p, jak w sposobie Newtona za pierwiastek przybliżony na $\frac{1}{10}$, znajdujemy potem poprawkę $\alpha=-\frac{f(p)}{f_1(p)}$ zatem

$$\alpha=-\frac{1}{\frac{1}{p-x_1}+\frac{1}{p-x_2}+\frac{1}{p-x_3}+\frac{1}{p-x_4}+\cdots\cdots}$$

albo
$$\alpha=\frac{1}{\frac{1}{x_1-p}+\frac{1}{x_2-p}+\frac{1}{x_3-p}+\frac{1}{x_4-p}+\cdots\cdots}$$

Przypuściwszy teraz że x_1 jest pierwiastkiem którego szukamy i którego p jest wartością przybliżoną, ale zawsze już to większą lub mniejszą niż x_1, tedy pojmujemy że x_1-p jest tem co brakuje wartości p aby otrzymać prawdziwą x_1, nie mając względu na znaki; wyraźniej mówiąc jest to różnica między prawdziwą x_1 a przybliżoną wartością (p) pierwiastka. Dla tej samej przyczyny będzie $x_1-p-\alpha$ różnicą między prawdziwym x_1 a bardziej przybliżonym F $p+\alpha$ pierwiastkiem. Nie trudno też pojąć że ta druga różnica, według sposobu Newtona powinna być mniejszą niż pierwsza t.j. $x_1-p-\alpha<$ ~~$p-\alpha$~~ x_1-p, a następnie, że

$\frac{1}{x_1-p-\alpha}>\frac{1}{x_1-p}$ zawsze nie uważając na znaki. Dla krótkości połóżmy

$$\frac{1}{x_2-p}+\frac{1}{x_3-p}+\frac{1}{x_4-p}+\frac{1}{x_5-p}+\cdots\cdots=R,\ \text{tedy będzie}$$

$$x_1-p-\alpha=x_1-p-\frac{1}{\frac{1}{x_1-p}+R}\ \text{skąd}\ \frac{1}{x_1-p-\alpha}=\frac{\frac{1}{x_1-p}+R}{R(x_1-p)}=\frac{1}{x_1-p}+\frac{1}{(x_1-p)^2R}$$

Z ostatniego zrównania jasno widzimy, że jeżeli x_1-p i R mają jednakowe znaki, będzie też $\frac{1}{x_1-p-\alpha}$ mieć tenże sam znak i powyższy warunek, mianowicie że $\frac{1}{x_1-p-\alpha}>\frac{1}{x_1-p}$ będzie dopełnionym. Lecz jeżeli x_1-p i R mają przeciwne znaki, natenczas rzeczony warunek jedynie wtedy, będzie dopełnionym, gdy $\frac{1}{(x_1-p-\alpha)^2}>\frac{1}{(x_1-p)^2}$. Z powyższego atoli mamy

$$\frac{1}{(x_1-p-\alpha)^2}=\frac{1}{(x_1-p)^2}+\frac{2}{(x_1-p)^3R}+\frac{1}{(x_1-p)^4R^2}$$

Aby żądanego warunku dopełnić, koniecznym jest rzeczą żeby $\frac{2}{(x_1-p)^3R}+\frac{1}{(x_1-p)^4R^2}$ było ilością dodatną, t.j. żeby $\frac{2}{(x_1-p)^3R}+\frac{1}{(x_1-p)^4R^2}>0$ czyli $2(x_1-p)R+1>0$. Ale ta ilość zależy jak widzimy od reszty pierwiastków $x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots$ nam wcale jeszcze nieznanych, dlatego bardzo jest trudną, a nawet niemożebną rzeczą wynaleźć prawidło z którego byśmy osądzić mogli azali warunek ostatni jest dopełnionym lub nie. Łatwo atoli utworzyć naprzód zrównanie

F bez powtórzenia z n elementów, biorąc ich po

F czyli poprawionym

7 Po uwagach Lagranża, weźmy (w „Math. nova comm. Götting. vol. II 1811–15 pag. 72“)
~~[illegible]~~ równanie podane przez Gaussa (a które już) ~~a rozwią-~~
~~zane sposobem Gräffego przez Enckego w „Jahrbuch für 1841“~~ ~~(sposób Gräffego później przytoczę)~~ ~~które~~ w § 241 mó-
wię o granicach pierwiastków pod inną postacią przywiodłem. Rzeczone równanie
jest następujące: $f(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{63}{13}x^5 - \frac{175}{52}x^4 + \frac{175}{143}x^3 - \frac{63}{286}x^2 + \frac{7}{429}x - \frac{1}{3432} = 0$
Przywiodłszy ~~równanie to~~ je, do najmniejszego jaki tu być może wspólnego mianownika
3432 i potem podzieliwszy ~~równanie~~ przez 4, otrzymamy równanie w § 241 przy-
toczone t. j. $858x^7 - 3003x^6 + 4158x^5 - 2887{\cdot}5x^4 + 1050x^3 - 189x^2 + 14x - 0{\cdot}25 = 0$

W powołanym § fie znaleźliśmy granice wszystkich jego pierwiastków, oraz że $x = 0{\cdot}5 = \frac{1}{2}$ jest ~~x~~ jednym z jego pierwiastków. Aby z mniejszemi liczbami dalej mieć do czynienia, zniżmy to równanie do niższego stopnia przez dzielenie przez znany już czynnik pierwiastkowy $2x-1$, bo $x=\frac{1}{2}$, a otrzymamy dla reszty pierwiastków $f(x) = 429x^6 - 1287x^5 + 1435{\cdot}5x^4 - 726x^3 + 162x^2 - 13{\cdot}5x + 0{\cdot}25 = 0$

Szukajmyż tu pierwiastka, który, jak w rzeczonym § fie pokazaliśmy, leży między 0·1 i 0·2. Położywszy $p = 0{\cdot}1$, znajdziemy $f(0{\cdot}1) = -0{\cdot}07489$, $f_1(0{\cdot}1) = 2{\cdot}24424$ a następnie $\alpha = -\frac{f(p)}{f_1(p)} = +\frac{0{\cdot}07489}{2{\cdot}24424} = +0{\cdot}033$, zatem $p' = 0{\cdot}133$. Kładąc dalej tę nową wartość znajdziemy $f(p') = f(0{\cdot}133) = +0{\cdot}01008746$, $f_1(0{\cdot}133) = +2{\cdot}6678014$, stąd $\alpha' = -\frac{0{\cdot}01008746}{2{\cdot}6678014} = -0{\cdot}00378$, przeto $p'' = 0{\cdot}133 - 0{\cdot}00378 = 0{\cdot}12922$

Robiąc jeszcze jedną poprawkę, znajdziemy $f(p'') = f(0{\cdot}12922) = -0{\cdot}0000385734$ a $f_1(0{\cdot}12922) = +2{\cdot}851234904$, a stąd

$$\alpha'' = -\frac{f(p'')}{f_1(p'')} = +\frac{0{\cdot}0000385734}{2{\cdot}851234904} = +0{\cdot}00001352$$

a następnie przybliżony pierwiastek jest $x = 0{\cdot}12923352\ldots$ i t. d. W tym pierwiastku dopiero piąta cyfra jest dokładną, o czem się przekonać można kładąc raz $x = 0{\cdot}12923$ a drugi raz $x = 0{\cdot}12924$

otrzymamy bowiem wypadki obu tych podstawień ze znakami przeciwnemi.

Tym samym sposobem znaleźć można i pozostałych pierwiastków. Dla ćwicze,, nia się w tym rachunku, podaję tu wszystkie siedm pierwiastków tak jak je ~~zna~~ podał sam Gauss w „Comment. nova comm. Gotting. vol. II 1814–15 pag. 72" ~~[illegible] „Neue Methode zur Auffindung der reellen Wurzeln höherer nu,, merischer Gleichungen, Wien 1842"~~ ~~(w ośmiu cyfrach dziesiętnych dokładnie~~ [illegible]

$x_1 = 0{,}625441$~~31~~$6643828\,6202\ldots$ $\qquad x_5 = 0{,}7029922$~~7~~$5\,75688\,6985\ldots$

$x_2 = 0{,}129234$~~38~~$401\ldots$ $\quad x_4 = 0{,}5$ (72003028) $\qquad x_6 = 0{,}8707656$~~62~~$2592799\,6972\ldots$

$x_3 = 0{,}297077$~~23~~$4243113015\ldots$ $\qquad x_7 = 0{,}974558$~~69~~$39561713798\ldots$

Ten przykład zdawałby się mówić przeciw spostrzeżeniu Lagranża niedostateczno,, ści sposobu Newtona w każdym razie, bo tu rzeczywiście jest przypadek taki że różnice $x_1 - p$, $x_3 - p$, $x_4 - p$, i t. d. o których w § 27 mówiliśmy, są bardzo małe ~~mówić atoli potrzeba że nie mając drugiej~~ nie mogą nawet być i ze znakami przeciwnemi a wszelako rachunek pierwiastka x_2 jak widzieliśmy, zbli,, żał nas za każdem działaniem do prawdziwej jego wartości. Uważyć atoli potrzeba że w tym przykładzie każdy z jednym pierwiastków dokładnie naprzód ~~x~~ został ograniczonym, co zapewne wpłynęło na dokładność spo,, sobu. † W tem mniemaniu utwierdza mnie Fourier który w swym sposo,, bie rozwiązania zrównań, o jakich tu mowa, a który także w dalszym ciągu poznamy, pozostał przy sposobie Newtona ~~[illegible]~~ zbliżania się do praw,, dziwej wartości pierwiastka, przydając tylko sposób zamykania każdego następnego przybliżenia między dwie granice różniące się o 1 w ostatniej cyfrze, oraz podając cechę wskazującą wiele pewnych cyfer otrzymuje się w każdem następnem zbliżeniu, a nareszcie ułatwiając rachunek każdej poprawki za pomocą tak przez niego nazwanego sposobu kowa,, nego dzielenia. †. Twierdzić by więc należało, że skoro wszystkie pierwiastki zrówna,, nia są dostatecznie ograniczonemi, co za najważniejsze w rozwiązywaniu zrównań uważam, sposób Newtona jest dostatecznym. Jedna jest tylko jego niedogodność, mianowicie że nie mając cechy po której by poznać można stopień zbliżenia się i udawać się potrzeba do mozolnego podstawiania.

w którymby rzeczony warunek nie był dopełnionym; dosyć bowiem wziąć za pierwiastki $x_2, x_3, x_4 \ldots x_n$ takie liczby, żeby niektóre z różnic x_2-p, x_3-p, x_4-p, ... były bardzo małe i z przeciwnemi znakami. A jeżeli niektóre z pierwiastków są urojonemi np. x_2, x_3, postaci $\pi+\varrho\sqrt{-1}$ i $\pi-\varrho\sqrt{-1}$, dostatecznem będzie wziąć π niewiele różne od p a ϱ bardzo małe, aby za pomocą sposobu Newtona zamiast zbliżenia, ciągle oddalać się od prawdziwej wartości pierwiastka.

Z tego dowodu wypływa wniosek, że Newtona sposobem tylko wtedy z pewnością użyć można, gdy szukamy największego lub najmniejszego pierwiastka t.j. największego dodatniego lub największego odjemnego. W takim razie bierze się w obu przypadkach p większe niż x_1 bez względu na znak, a pewnymi być możemy że ze każdem działaniem coraz więcej zbliżać się będziemy do prawdziwego pierwiastka, bo ilości x_1-p i R mieć będą jednakowe znaki. Aby poznać czyli pierwsza przybliżona wartość p jest większą lub mniejszą niż każdy z pierwiastków, uważmy że kiedy w zrównaniu $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(\ldots\ldots)(x-x_n)=0$† położymy poprawioną wartość $p+\alpha$ za x, otrzymamy

$$(\alpha+p-x_1)(\alpha+p-x_2)(\alpha+p-x_3)(\alpha+p-x_4)(\ldots\ldots)=0$$

gdzie $p-x_1$, $p-x_2$, $p-x_3$ .... $p-x_n$ są albo wszystkie dodatne albo wszystkie odjemne podług tego jak p większem lub mniejszem jest niż każdy z pierwiastków. W pierwszym przypadku, wykonawszy w ostatniem zrównaniu mnożenie i uporządkowawszy według potęg α, będzie to zrównanie mieć same następstwa znaków; w drugiem zaś same przemiany znaków: t.j. po położeniu $p+\alpha$ za x, wypadkowe zrównanie mieć będzie albo same pierwiastki odjemne, albo też same dodatne. Ażeby są wyrażone przez $p-x_1$, $p-x_2$, $p-x_3$, $p-x_4$, ... zatem rzeczywiście w pierwszym przypadku p jest mniejszem a w drugim większem niż każdy z pierwiastków x_1, x_2, x_3 ....

† którego pierwiastki wszystkie uważamy za rzetelne,

Skoro więc położymy w $f(x)$ p za x t.j. pierwszą przybliżoną wartość, zaraz rozpoznać można ze znaków wielomianu $f(p)$ czyli sposób Newtona z pewnością użytym być może. Jeżeli jednak zrównanie $f(x)=0$ ma i pierwiastki urojone, natenczas nie tak jest łatwo zapewnić się czyli rzeczonego sposobu użyć można lub nie.

† Sposób Lagranża

§ 28. Lagranż† wykazawszy niedostateczność sposobu rozwiązania zrównań liczbowych przez Newtona podanego, nauczył zarazem innego zawsze pewnego. Ten jego sposób zasadza się na wyrażeniu pierwiastka, który obrachować chcemy, przez ułomek ciągły a to następującym sposobem. Umiemy znaleźć dwie całkowite liczby pomiędzy które szukany pierwiastek przypada. Ponieważ za pomocą ścieśniania granic zawsze przychodzimy do zamknięcia pierwiastka między dwie całkowite liczby różniące się tylko o jedność, niechże więc dla pewnego pierwiastka zrównania $f(x)=0$, temi dwiema liczbami będą k_0 i k_0+1, tedy położyć możemy szukany pierwiastek $x=k_0+\frac{1}{x_1}$, gdzie oczywiście $x_1>1$ bo to co brakuje liczbie k_0 do prawdziwego pierwiastka jest pewno ułomkiem właściwym. Położywszy w danem zrównaniu powyższą wartość x i uporządkowawszy wielomian zrównania według potęg malejących lub rosnących ilości x_1, otrzymamy nowe zrównanie $f(x_1)=0$ o którem z pewnością wiemy że ma jeden pierwiastek dodatny i większy od 1 według powyższego. Szukając znowu dwóch liczb różniących się tylko o 1 pomiędzy które przypada rzeczony pierwiastek, oznaczmy je przez k_1 i k_1+1, tedy położyć możemy $x_1=k_1+\frac{1}{x_2}$, gdzie dla tej samej co wyżej przyczyny $x_2>1$. A skoro wartość x_1 położymy w zrównaniu $f(x_1)=0$

i uporządkujemy według x_2, otrzymamy równanie $f(x_2)=0$ które mieć będzie z pewnością pierwiastek ~~przynajmniej~~ jeden dodatny i większy od 1. Niechże znowu dwie całkowite o jedność różniące się liczby, pomiędzy które ten pierwiastek przypada, będą k_2 i k_2+1, tedy będzie $x_2=k_2+\frac{1}{x_3}$. Za pomocą położenia tej wartości w ostatniem równaniu, znajdziemy tąż samą drogą $x_3=k_3+\frac{1}{x_4}$. Zawsze jednym i tym że samym trybem postępując, jasną jest rzeczą że następnie otrzymywać będziemy wartości $x_4=k_4+\frac{1}{x_5}$, $x_5=k_5+\frac{1}{x_6}$, $x_6=k_6+\frac{1}{x_7}$ i t. d. A wracając teraz do wartości x_1 i kładąc następnie wartości $x_1, x_2, x_3 \ldots$ znajdziemy

$$x = k_0+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{k_3+\cfrac{1}{k_4+\text{ i t. d.}}}}}$$

t. j. znajdziemy pierwiastek pełny rozwiniony na ułamek ciągły. Ten zwijając według Arytmetyki, otrzymamy wartości przybliżone szukanego pierwiastka z których jak wiadomo ocenić można jego dokładność, tak że wiedzieć będziemy która jego cyfra jest pewną. W razie potrzeby pierwiastka w więcej cyfrach, możemy też wiedzieć jak daleko powyższe przebieranie równania posunąć należy. Przykład nam to jaśniej pokaże. Za takowy weźmy równanie na którem doświadczaliśmy rozwiązania Newtona t. j. równanie $f(x)=x^3+8x^2+6x-75{\cdot}9=0$. Ponieważ to wiemy z powołanego miejsca że dodatny pierwiastek tego równania przypada między 2 i 3, zatém kładziemy $x=2+\frac{1}{x_1}$. Napiszawszy tę wartość tak $x=\frac{1}{x_1}+2$, podstawienie uskuteczni się sposobem w ~~§ 34~~ § 59. opisanym t. j.

	1	+8	+6	−75·9
2)	1	+10	+26	−23·9
	1	+12	+50	
	1	+14		

Wypadające przeto z podstawienia równanie jest $\frac{1}{x_1^3}+\frac{14}{x_1^2}+\frac{50}{x_1}-23{\cdot}9=0$ albo według § 24, gdzie szukaliśmy granic ujemnych pierwiastków,

$$f(x_1)=23{\cdot}9x_1^3-50x_1^2-14x_1-1=0$$

Nie szukając tu zwyczajnym sposobem dwóch liczb pomiędzy które pierwiastek dodatny tego równania przypada, ale raczej przez probowanie, robiąc tylko pobieżny rachunek, znajdziemy że ten pierwiastek przypada między 2 i 3, ~~x~~ zatém $x_1=2+\frac{1}{x_2}$. Z tą wartością postępiwszy zupełnie jak z pierwszą znajdziemy: $f(x_2)=\frac{23{\cdot}9}{x_2^3}+\frac{93{\cdot}4}{x_2^2}+\frac{72{\cdot}8}{x_2}-37{\cdot}8=0$

albo — — — $f(x_2)=37{\cdot}8x_2^3-72{\cdot}8x_2^2-93{\cdot}4x_2-23{\cdot}9=0$

Probując znowu, znajdziemy że pierwiastek dodatny tego równania większy od 1 przypada między 2 i 3, gdyż dla tych dwóch podstawień wypadki mają znaki przeciwne. Kładąc więc w ostatniem równaniu $x_2=2+\frac{1}{x_3}$, otrzymamy następne przerobione równanie

$$f(x_3)=199{\cdot}5x_3^3-69x_3^2-154x_3-37{\cdot}8=0$$

Łatwo tu znajdziemy że pierwiastek tego równania dodatny i większy od 1, przypada pomiędzy 1 i 2, zatém kładąc $x_3=1+\frac{1}{x_4}$, znajdziemy następne przerobione równanie $f(x_4)=61{\cdot}3x_4^3-366{\cdot}5x_4^2-529{\cdot}5x_4-199{\cdot}5=0$

którego pierwiastek dodatny i większy od 1 przypada między 6 i 7. Położywszy więc $x_4=6+\frac{1}{x_5}$, znajdziemy, zawsze tąż samą drogą

$$f(x_5)=1169{\cdot}7x_5^3-2412{\cdot}9x_5^2-796{\cdot}9x_5-61{\cdot}3=0$$

którego pierwiastek przypada między 2 i 3, położyć przeto można $x_5=2+\frac{1}{x_6}$ i t. d. Ułamek ciągły w którym otrzymamy pełny pierwiastek po przerobieniach dotąd wykonanych, będzie

$$x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\text{ i t. d.}}}}}}$$

który zwinąwszy znajdziemy przybliżone wartości pierwiastka

$\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{17}{7}, \frac{114}{47}, \frac{245}{101}$ z których jak wiadomo każda następna daje pierwiastek bardziej do prawdziwego zbliżony. Ostatnia z nich jest $\frac{245}{101} = 2{,}42574\ldots$ Tę wartość porównawszy z otrzymaną w §26 przekonamy się że jest dokładną w czterech cyfrach dziesiętnych.

Za drugi przykład weźmy zrównanie z powołanego §fu

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 15x + 17 = 0$$

którego pierwiastek odjemny przypada, jak widzieliśmy, między 0 i 1. Aby i tu nie mieć do czynienia z odjemnym ale dodatnym pierwiastkiem, na zasadzie §5. mamy zrównanie

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 15x - 17 = 0$$

którego pomyślny pierwiastek będzie dodatnym i przypada także pa między 0 i 1. Położywszy więc $x = 0 + \frac{1}{x_1}$, znajdziemy

$$f(x_1) = 17x_1^5 - 15x_1^4 - 10x_1^3 - 10x_1^2 - 5x_1 - 1 = 0$$

Tego zrównania pierwiastek dodatny większy od 1 przypada między 1 i 2, przeto kładąc $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$, znajdziemy

$$f(x_2) = 24x_2^5 + 30x_2^4 - 40x_2^3 - 106x_2^2 - 70x_2 - 17 = 0.$$

Tego tu zrównania pierwiastek dodatny i większy niż 1 przypada między 1 i 2, położywszy zatem $x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$, otrzymamy

$$f(x_3) = 173x_3^5 + 150x_3^4 - 200x_3^3 - 320x_3^2 - 150x_3 - 24 = 0$$

gdzie znowu kładąc $x_3 = 1 + \frac{1}{x_4}$, otrzymamy nowe zrównanie

$$f(x_4) = 371x_4^5 - 75x_4^4 - 1710x_4^3 - 2120x_4^2 - 1015x_4 - 173 = 0$$

którego pierwiastek, o jakim tu zawsze mowa, przypada między 2 i 3. Położywszy więc $x_4 = 2 + \frac{1}{x_5}$, następne zrównanie będzie

$$f(x_5) = 13691x_5^5 + 2735x_5^4 - 15500x_5^3 - 12530x_5^2 - 3635x_5 - 371 = 0$$

a pierwiastek jego przypada między 1 i 2. Kładąc dalej $x_5 = 1 + \frac{1}{x_6}$, nowe zrównanie będzie

$$f(x_6) = 15610x_6^5 - 4200x_6^4 - 94290x_6^3 - 132350x_6^2 - 71190x_6 - 13691 = 0$$

a jego pierwiastek przypada między 3 i 4, przeto $x_6 = 3 + \frac{1}{x_7}$ i t.d.

Wracając teraz do wartości x, znajdziemy

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \text{i t.d.}}}}}}}$$

Wartości przybliżone tego ułamku są $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}, \frac{26}{41}$ i t.d.

Ostatnia wartość $\frac{26}{41} = 0{,}634\ldots$ daje pierwiastek dokładny tylko w trzech cyfrach. Chcąc go przeto mieć w więcej cyfrach, musielibyśmy powyższe przerobienie posunąć jeszcze dalej, bo mianowniki ułamku są małe i dlatego nie prędko się zbliżamy do prawdziwej wartości.

Weźmy jeszcze jeden przykład. Szukajmy pierwiastków zrównania

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$$

Granicą pierwiastków dodatnych jest liczba 5 t.j. dodatne pierwiastki jeżeli wszystkie są rzeczywiste, leżą między 0 i 5. Podstawienie wątpliwych granic wykaże że tylko między 3 i 4 leży jeden pierwiastek; położywszy więc $x = 3 + \frac{1}{x_1}$ znajdziemy

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= 4x_1^3 - 12x_1^2 + 3x_1 - 1 = 0. \quad \text{Kładąc tu } & x_1 &= 2 + \tfrac{1}{x_2} \\
f(x_2) &= 11x_2^3 - 3x_2^2 - 12x_2 - 4 = 0 \quad \ldots & x_2 &= 1 + \tfrac{1}{x_3} \\
f(x_3) &= 8x_3^3 - 15x_3^2 - 30x_3 - 11 = 0 \quad \ldots & x_3 &= 3 + \tfrac{1}{x_4} \\
f(x_4) &= 20x_4^3 - 96x_4^2 - 57x_4 - 8 = 0 \quad \ldots & x_4 &= 5 + \tfrac{1}{x_5} \\
f(x_5) &= 193x_5^3 - 483x_5^2 - 204x_5 - 20 = 0 \quad \ldots & x_5 &= 2 + \tfrac{1}{x_6} \\
f(x_6) &= 816x_6^3 - 180x_6^2 - 675x_6 - 193 = 0 \quad \ldots & x_6 &= 1 + \tfrac{1}{x_7} \\
f(x_7) &= 232x_7^3 - 1413x_7^2 - 2268x_7 - 816 = 0 \quad \ldots & x_7 &= 7 + \tfrac{1}{x_8} \\
f(x_8) &= 6353x_8^3 - 12054x_8^2 - 3459x_8 - 232 = 0 \quad \ldots & x_8 &= \text{ i t.d.}
\end{aligned}
$$

Przybliżony przeto pierwiastek który szukujemy, a zamieniony na ułamek ciągły, jest:

F Dwa inne pierwiastki tego równania się urojonemi, o czem się łatwo przekonać. Podzieliwszy bowiem sposobem w §10 wspomnianym wielomian $x^3-12x^2+57x-94$ przez $x-3{,}36$ i zrównawszy iloraz z zerem, i licząc tylko trzy cyfry dziesiętne, otrzymamy do tych pierwiastków równanie $x^2-8{,}64x+27{,}97=0$, w którym $\frac{1}{4}(8{,}64)^2=(4{,}32)^2<27{,}97$, co pokazuje, że oba pierwiastki tego równania są urojonemi.

$$x=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\text{i t. d.}}}}}}}}$$

którego wartościami przybliżonemi są

$$3,\ \frac{7}{2},\ \frac{16}{3},\ \frac{37}{11},\ \frac{195}{58},\ \frac{427}{127},\ \frac{622}{185},\ \frac{4781}{1422}\ \ldots$$

Ostatnia wartość $\frac{4781}{1422}=3{,}3621659\ldots$ którą biorę za prawdziwy pierwiastek, popełnia się błąd mniejszy niż $0{,}0000004$ co znaczy że sześć pierwszych cyfer dziesiętnych tego pierwiastka są zupełnie dokładne. F

Jeżeli chodzi o pierwiastek w kilkunastu cyfrach dziesiętnych dokładny, natenczas można sposób Lagranża połączyć ze sposobem Newtona, mianowicie: szuka się sposobem Lagranża pierwiastka w dwóch lub trzech cyfrach dokładnych, a dalsze rachuje się sposobem Newtona bo za jego pomocą prędzej się ~~[illegible]~~ dojdzie do celu.

§29. ~~[illegible]~~ Lubo sposób Lagranża jest, jak widzieliśmy w poprzednich przykładach, bardzo łatwym, ~~a~~ pomimo iż każdy (zaraz dostrzeże, iż z postępem rachunku staje się nader mozolnym, z powodu tak samych przerobień następnych zrównań, jako też wyszukiwania całkowitej części ~~[illegible]~~ pierwiastku każdego przerobionego zrównania. Otóż, jak Lagranż rozbierał sposób Newtona, i pewność jego ograniczał, ~~[illegible]~~ i w miejsce jego podał swój w każdym razie pewny, tak znowu znakomity matematyk Leżandr podał nader wielkie a genialne ułatwienie w użyciu sposobu Lagranża. To ułatwienie zależy na tem, że całkowitą część pierwiastka ~~[illegible]~~ każdego przerobionego zrównania znajduje się nie sposobem podstawiania i szukania dwóch liczb o jedność się różniących, pomiędzy które przypada pierwiastek, ale daleko łatwiejszą drogą, którą następnym dowodem wskażę.

Według Lagranża sposobu, otrzymuje się, jak to w poprzednim § widzieliśmy, pierwiastek rozwiniony na ułamek ciągły, który następnie zwiniemy, otrzymujemy tak nazwane przybliżone wartości pierwiastka wyrażone w ułamkach zwyczajnych. Niech $\frac{A}{B}$ i $\frac{C}{D}$ będą dwiema takiemi sobie następującemi wartościami. W zwijaniu ułamku ciągłego wiadomo że każda z wartości przybliżonych przypada pod pewnym mianownikiem ułamku ciągłego i że przy pomocy tegoż mianownika i poprzedniej wartości przybliżonej, znajdujemy następną. Ponieważ dokładny pierwiastek zrównania można sobie wystawić rozwiniony na ułamek ciągły skończony, ~~więc~~ więc ostatni ~~wyraz~~ ułamku ciągłego i pierwiastek jako skończony t. j. wymierny, więc ostatni ułamku ciągłego, będzie miał mianownika także skończonego czyli że ten mianownik będzie liczbą całkowitą bez ułamku dalszego, a to w ten sposób:

$$x=k_0+\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{k_3+\cfrac{1}{z}}}}$$

gdzie z wyraża już dokładny mianownik tak że gdy się ten ułamek zwinie otrzyma się pierwiastek x dokładnie. Jeżeli więc przybliżona wartość $\frac{C}{D}$ przypada pod mianownikiem z w ten sposób $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, tedy następna przybliżona wartość, jak to wiemy z formowania tychże wartości, będzie $\frac{Cz+A}{Dz+B}$. A ponieważ z, jak powiedziano, jest już ~~[illegible]~~ mianownikiem skończonym, lub też tym za taki uważanym, więc koniecznie być musi $x=\frac{Cz+A}{Dz+B}$ skąd znajdziemy $z=\frac{Bx-A}{C-Dx}=-\frac{B}{D}+\frac{BC-AD}{D(C-Dx)}$ t. j. $z+\frac{B}{D}=\frac{BC-AD}{D(C-Dx)}$

Jeżeli teraz mamy zrównanie $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots\ldots=0$ i położymy w niem powyższą wartość x a wypadek uporządkujemy według malejących potęg z, znajdziemy $a'_nz^n+a'_{n-1}z^{n-1}+a'_{n-2}z^{n-2}+\ldots\ldots+a'_0=0$

W tem zrównaniu $-\frac{a'_{n-1}}{a'_n}$ jest sumą jego pierwiastków których wyobrażnikiem jest z, wyobrażnikiem zaś pierwiastków pierwszego zrównania jest x. W wartości powyższej na z, uważajmy x jako pierwiastek

(zaś Z, wartość jemu odpowiednią.

który właśnie poszukujemy według sposobu Lagranża, inne ××× pierwiastki pierwszego zrównania oznaczymy przez x_1, x_2, x_3 ... a odpowiadające im pierwiastki Z, oznaczmy przez z_1, z_2, z_3 ... tedy z powyższego znajdziemy

$$z_1+\frac{B}{D}=\frac{BC-AD}{D(C-Dx_1)}$$
$$z_2+\frac{B}{D}=\frac{BC-AD}{D(C-Dx_2)}$$
$$z_3+\frac{B}{D}=\frac{BC-AD}{D(C-Dx_3)}$$
$$z_4+\frac{B}{D}=\frac{BC-AD}{D(C-Dx_4)}$$
i t. d.

Dodawszy te zrównania, ponieważ według powyższej uwagi jest $z+z_1+z_2+z_3+z_4+\dots = -\frac{a'_{n-1}}{a'_n}$ F tudzież z teoryi ułamków ciągłych wiadomo że $BC-AD=\pm 1$, a nareszcie położywszy dla krótkości $\frac{1}{\frac{C}{D}-x_1}+\frac{1}{\frac{C}{D}-x_2}+\frac{1}{\frac{C}{D}-x_3}+\dots=\Delta$, znajdziemy:

$$-z-\frac{a'_{n-1}}{a'_n}+(n-1)\frac{B}{D}=\pm\frac{\Delta}{D^2}$$

A jeżeli Δ jest dostatecznie małem,* wtedy ilość $\frac{\Delta}{D^2}$ zaniedbać możemy, a w takim razie otrzymamy

$$z=(n-1)\frac{B}{D}-\frac{a'_{n-1}}{a'_n}$$

Z tego zrównania czytamy: mając dane po sobie następujące wartości przybliżone ułamku ciągłego, na który pierwiastek zrównania danego rozwijamy, znajdziemy następny mianownik, przy pomocy którego znajdujemy następną wartość przybliżoną, z dwóch szczeronych wartości $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ oraz z dwóch pierwszych współczynników a'_n i a'_{n-1} zrównania przerobionego, biorąc tylko największą całkowitą liczbę zawartą w ostatniem wyrażeniu na Z.

*) Objaśniam postępowanie Lezandra na ostatnim przykładzie poprzedniego §fu. Przyszedłszy tamże do zrównania $f(x_2)=11x_2^3-3x_2^2-12x_2-4=0$ którego całkowitą część pierwiastka 1 podstawiwszy w tem to zrównaniu wiadomym sposobem, otrzymujemy zrównanie $f(x_3)=8x_3^3-15x_3^2-36x_3-11=0$. Aby to znaleść całkowitą część pierwiastka, mamy już trzy przybliżone wartości ułamku ciągłego albo szeregu szukanego pierwiastka, mianowicie $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{2}$ i $\frac{16}{3}$; chcąc więc znaleść następną, potrzeba znaleść mianownika przychodzącego nad wartością $\frac{16}{3}$, który powyżej przez Z oznaczyliśmy. Dla otrzymania go, mamy: $\frac{A}{B}=\frac{7}{2}$, $\frac{C}{D}=\frac{16}{3}$, $n=3$ t.j. stopień zrównania zaś $a'_n=8$, $a'_{n-1}=-15$; przeto $z=(3-1)\cdot\frac{2}{3}-\left(-\frac{15}{8}\right)=\frac{4}{3}+\frac{15}{8}=3+\dots$ więc liczba 3 jest owoż całkowitą częścią pierwiastka ostatniego zrównania, oraz dalszym mianownikiem ułamku ciągłego w którego rozwijaniu przypadnie nad wartością $\frac{C}{D}=\frac{16}{3}$ a przy której pomocy znajdzie się następna przybliżona wartość $\frac{37}{11}$. Tęż samą liczbę 3 kładąc wiadomym sposobem w ostatniem zrównaniu, otrzyma się nowe przerobione $f(x_4)=20x_4^3-96x_4^2-57x_4-8=0$. Chcąc tu mieć całkowitą część pierwiastka, mamy teraz $\frac{A}{B}=\frac{16}{3}$, $\frac{C}{D}=\frac{37}{11}$, $n=3$ $a'_n=20$, $a'_{n-1}=-96$; przeto $z=2\cdot\frac{3}{11}+\frac{96}{20}=5+\dots$. Przy pomocy tej liczby otrzyma się nowe przerobione zrównanie $f(x_5)=193x_5^3-483x_5^2-204x_5-20=0$ oraz nową, po wartości $\frac{37}{11}$ następującą $\frac{195}{58}$. Dla znalezienia całkowitej części pierwiastka ostatniego zrównania, mamy $\frac{A}{B}=\frac{37}{11}$, $\frac{C}{D}=\frac{195}{58}$ oraz $a'_n=193$, $a'_{n-1}=-483$, przeto $z=2\cdot\frac{11}{58}+\frac{483}{193}=2+\dots$. Dalsze zrównanie przerobione będzie $f(x_6)=876x_6^3-180x_6^2-675x_6-193=0$ dla którego $\frac{A}{B}=\frac{195}{58}$ a $\frac{C}{D}=\frac{427}{127}$, $a'_n=876$, $a'_{n-1}=-180$ a następnie $z=2\cdot\frac{58}{127}+\frac{180}{876}=1+\dots$ oraz $\frac{622}{185}$.

Ciągle tęż samą drogą postępując, otrzymamy

$$f(x_7)=232x_7^3-1413x_7^2-2268x_7-816=0 \dots z=7 \dots \frac{622}{185}$$
$$f(x_8)=6353x_8^3-12054x_8^2-3459x_8-232=0 \dots z=2 \dots \frac{4781}{1422}$$
$$f(x_9)=4542x_9^3-24561x_9^2-26664x_9-6353=0 \dots z=6 \dots \frac{10184}{3029}$$
$$f(x_{10})=65861x_{10}^3-169740x_{10}^2-57195x_{10}-4542=0 \dots z= \dots \frac{65885}{19596}$$
i t. d.

F t.j. $z_1+z_2+z_3+z_4+\dots=-z-\frac{a'_{n-1}}{a'_n}$

*) Lubo bowiem ilość Δ może przybierać rozmaite wartości, podług przybliżonej wartości $\frac{C}{D}$, to przecież ta ilość nie może nigdy stać się nieskończoną. W tym bowiem przypadku musiałoby być np. $\frac{C}{D}-x_1=0$ a w takim razie musiałoby też i zrównanie $f(x)=0$ mieć wymiernego dzielnika, co być nie może, bo przypuszczamy że też zrównanie nie ma pierwiastków wymiernych. Pomimo to ilość Δ może w niektórych przypadkach mieć wartość, którejby zaniedbać nie można, mianowicie w przypadku, gdy pierwiastek który szukamy mało się różni od jednego lub kilku innych. Ale że wartości przybliżone prędko zbliżają się do prawdziwej wartości, więc też i suma $\frac{1}{\frac{C}{D}-x_1}+\frac{1}{\frac{C}{D}-x_2}+\dots$ albo $\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\dots$ zbliża się prędko do pewnej granicy. Skoro więc wartość pierwiastka x już na $\frac{1}{10}$ otrzymamy dokładną, wtedy bez obawy można zaniedbać ilość Δ, i użyć sposobu Lezandra znajdowania dalszych przybliżonych wartości pierwiastka.

Ostatnia wartość przybliżona $\frac{65885}{19596} = 3{,}362165748\ldots$ którą biorę za prawdziwy pierwiastek, mniej błędzimy niż 0,000000002, a zatém ośm pierwszych jego cyfer dziesiętnych są zupełnie pewnemi.

Przytaczać tu więcéj przykładów w celu lepszego wyjaśnienia poprzedniego postępowania, nie widzę potrzeby, bo postępowanie to uważam za bardzo jasne.

Trzeci sposób przez Regułę fałszywego założenia

§30. Zamiast sposobu Newtona lub Lagranża, używa się częściej i z bardzo dobrym skutkiem tak nazwanego sposobu reguły fałszywego założenia, który nie wymagając innych od Newtonowego warunków, ma jednak nie jako wyższość nad nim, że użytym być może nawet w zrównaniach przestępnych. Chcąc tu pokazać użycie téj reguły, muszę naprzód nieco przypomnieć na czém rzeczywiście zależy reguła fałszywego założenia.

(reguły fałszywego założenia ; reguła falsi :)

Nim teorya zrównań stanęła na stopniu jaki teraz w Matematyce zajmuje, używano w razie potrzeby do rozwiązania zrównań ~~pierwszego~~ szczególniéj ~~i drugiego~~ stopnia, téj reguły uczono w Arytmetyce przy zastósowaniu nauki o proporcyjach do rozwiązywania zagadnień. Była ona pojedynczego lub podwójnego fałszywego założenia według własności zagadnienia. W regule pojedynczego fałszywego założenia bierze się za nieznaną ilość albo całkiem dowolną, albo téż taką liczbę o któréj wiemy że się nie wiele różni od prawdziwéj. Dopełniając z tą liczbą wszystkich ~~w~~ zagadnieniu żądanych warunków, pokaże się zawsze w końcu że ~~ta~~ liczba ~~dopełnia~~ (~~…~~) zbiorowe, a ostatni wypadek pokazuje ~~x~~ wielkości błędów. Liczbę przyjętą i podstawioną za nieznaną ilość, nazywamy założeniem fałszywém, wypadek z podstawienia téj liczby, a raczéj różnica od prawdziwego jaki otrzymać powinniśmy, nazywa się błędem wypadku dla tegoż założenia. Otóż w nauce o proporcyjach uczono albo raczéj podawano prawidło na znalezienie prawdziwéj wartości ilości nieznanéj następujące: błąd założenia ma się do błędu wypadku w stósunku prostym jak prawdziwa wartość nieznanéj do prawdziwego wypadku, a z téj proporcyi znajdowano prawdziwą wartość nieznanéj.

Jak np. pyta się kto jaka to jest liczba któréj trzecia piąta i siódma część razem wzięte czynią 71? Przyjmiéjmy tu dowolną liczbę o którą jest pytanie, a którą dla łatwiejszego działania dobiera się zwyczajnie tak żeby dokładnie była podzielną przez 3, 5 i 7, np. liczbę 210, odbywając się z nią wskazane w pytaniu działania jak następuje: $\frac{1}{3}\cdot 210 = 70$, $\frac{1}{5}\cdot 210 = 42$, $\frac{1}{7}\cdot 210 = 30$; suma tych części jest $70+42+30 = 142$ zamiast 71. Tu liczba 210 jest fałszywém założeniem a 142 fałszywym wypadkiem. Oznaczywszy przez x prawdziwą wartość szukanéj liczby, tedy $x-210$ jest błędem założenia, zaś $71-142=-71$ ~~$142-71=71$~~ błędem wypadku, przeto według wyżéj podanego prawidła będzie

$$\frac{x-210}{-71} = \frac{x}{71}$$ albo $-x+210 = x$ stąd $2x = 210$ lub nareszcie $x = 105$

która liczba jest prawdziwą bo $\frac{1}{3}\cdot 105 + \frac{1}{5}\cdot 105 + \frac{1}{7}\cdot 105 = 71$.

Ostatnią proporcyą można téż tak napisać $\frac{x-210}{x} = \frac{-71}{71} = -1$, bo się tylko odmieniło miejsce wyrazom średnim, a wysłowić: błąd założenia ma się do ~~błędu~~ prawdziwéj liczby jak błąd wypadku do prawdziwego wypadku.

W regule podwójnego fałszywego założenia robi się dwa zupełnie powyższemu podobne założenia i postępuje się z każdém jak powyżéj z pojedynczém założeniem, poczém układa się następnie proporcyą: błędy wypadków mają się do siebie w stósunku prostym błędów założeń. Jeżeli np. z pewnych warunków ~~mamy~~ chcieli[?] znaleźć żądaną liczbę, ~~…~~ robimy pierwsze założenie przyjmując pewną liczbę S_1, a odbywszy z nią działania w warunkach wymagane, otrzymujemy wypadek B_1 zamiast P; robimy więc drugie założenie biorąc liczbę S_2 i po wykonaniu z nią działań, otrzymujemy B_2 zamiast P. Oznaczywszy przez x prawdziwą wartość szukanéj liczby, tedy $x-S_1$ i $x-S_2$ będą błędami założeń, zaś $P-B_1$ i $P-B_2$ odpowiadające błędy wypadków; przeto według podanego wyżéj prawidła będzie proporcyja $\frac{x-S_1}{x-S_2} = \frac{P-B_1}{P-B_2}$ z któréj znajduje się wartość x.

Téj ostatniéj proporcyi dla znalezienia x można daleko wygodniejszą nadać postać, mianowicie: wiadomo z nauki o proporcyjach że różnica dwóch pierwszych wyrazów tak się ma do poprzednika jak różnica dwóch drugich do poprzednika, przeto $\frac{(x-S_1)-(x-S_2)}{x-S_1} = \frac{(P-B_1)-(P-B_2)}{P-B_1}$ czyli $\frac{S_2-S_1}{x-S_1} = \frac{B_2-B_1}{P-B_1}$ albo $\frac{x-S_1}{S_2-S_1} = \frac{P-B_1}{B_2-B_1}$

która proporcyja wysłowiona, brzmi: błąd pierwszego założenia ma się do różnicy obu założeń, jak błąd pierwszego wypadku do różnicy obu wypadków, biorąc wszelakie różnice w tymże samym porządku, t.j. $\frac{x-S_1}{S_2-S_1} = \frac{P-B_1}{(P-B_1)-(P-B_2)}$.

którą ~~potrzecia~~ … 355: Przypuśćmy … a którą dla łatwiejszego … żeby była dokładnie … 420, odbywając się … następujący … Sumy tych części … a 420 jest fałszyw… … Oznaczywszy … 420 błędem założe… … przeto według … $x = 525$ … 175, $\frac{1}{5}$ część 105 a … no

Gdybyśmy atoli jeszcze więcej cyfer pewnych potrzebowali do pierwiastka, tedy przy obecnem zbliżeniu już nie potrzebujemy tych pozrobień które do tego wykonywaliśmy, ale postąpimy następującym sposobem aby znaleźć dalsze mianowniki ułamku ciągłego. Z ostatniego równania i dwóch ostatnich wartości przybliżonych, rachujemy dokładnie z. Na ten koniec mamy:

$$\frac{A}{B}=\frac{10184}{3029},\ \frac{C}{D}=\frac{65885}{19596},\ a'_n=65861,\ a'_{n-1}=-169740,\ \text{przeto}$$

$$z=2\cdot\frac{3029}{19596}+\frac{169740}{65861}=\frac{3029}{9798}+\frac{169746}{65861}=\frac{1862605489}{645306078}$$

Ten ostatni ułamek zamieniając na ciągły, znajdziemy szukane dalsze mianowniki

2, 1, 7, 1, 4, 18, 1, 5, 1, 3, 19 i t. d. tak że pierwszy 2 przychodzi nad powyższą wartością $\frac{65885}{19596}$. Przy pomocy tych mianowników, otrzymamy coraz dalsze a zatem więcej do prawdziwego pierwiastka zbliżone wartości

Tak np., pyta się kto jaka to jest liczba której ~~ws~~ trzecia,
piąta i siódma część razem wzięte czynią 355. Przypuściwszy
za dowolną liczbę o którą jest pytanie, a której działalność
przez działania dobiera się wyczajnie tak ażeby była dokła-
dnie podzielną przez 3, 5 i 7, np. liczbę 420, odbywają się
z niej wskazane w pytaniu działania jak następuje:
$\frac{1}{3}$ liczby 420 jest 140, $\frac{1}{5}$ jest 84 a $\frac{1}{7}$ jest 60. Sumując te części:
$140+84+60=284$ zamiast 355. Tu liczba 420 jest fałszy-
wym położeniem a 284 fałszywym wypadkiem. Oznaczywszy
prawdziwą szukaną liczbę przez x, będzie $x-420$ błędem założe-
nia, zaś $355-284=71$ błędem wypadku, prosto według
powołanego prawidła będzie

$$\frac{x-420}{71}=\frac{x}{355} \text{ albo } \frac{x-420}{x}=\frac{71}{355}$$

$$\text{albo } \frac{420}{x}=\frac{284}{355} \text{ albo } \frac{105}{x}=\frac{71}{355} \text{ skąd } x=525$$

która liczba jest prawdziwą bo jej $\frac{1}{3}$ część jest 175, $\frac{1}{5}$ część 105 a
$\frac{1}{7}$ jest 75 zaś $175+105+75=355$ jak żądano

Reguła fałszywego założenia daje wtedy tylko prawdziwą wartość ilości nieznanej, gdy zagadnienie prowadzi do równania pierwszego stopnia i wtedy obojętną jest rzeczą jaką się liczbę przyjmuje za fałszywe założenie. W każdym innym przypadku użycie tej reguły przypuszcza że się naprzód zna przybliżoną wartość szukanej liczby i wtedy szczególniej bardzo jest wygodną do prędkiego znalezienia szukanej liczby. Gdyby jednak w równaniu pierwszego stopnia nieznana ilość znajdowała się w mianowniku, wtedy za użyciem reguły fałszywego założenia otrzyma się nie prawdziwą ale tylko przybliżoną wartość tej nieznanej.

Sądzę że to wtrącenie tu o regule fałszywego założenia będzie mi darowane, bo rozumiałem iż przywodząc na pamięć to co już dawno zapomniane zostało, tém lepiej objaśnię uczynię się to co następuje.

§31. Weźmy liczbowe równanie jakiegokolwiek stopnia

$$ax^\alpha+bx^\beta+cx^\gamma+dx^\delta+\ldots\ldots=0$$

F ~~Połóżmy~~ połóżmy w niém, raz $x=s_1$ a drugi raz $x=s_2$. Dajmy że wypadki tych podstawień zamiast zero otrzymujemy B_1 i B_2 tedy każdy łatwo zrozumie że s_1 albo s_2 tém bliższem będzie prawdziwej wartości p, im wypadek B_1 lub B_2 bliższym będzie zero, tudzież że s_1-p i s_2-p będą błędami podstawień lub, jak poprzednio nazwałem, założeń, zaś B_1 i B_2 błędami wypadków. Jeżeli s_1 i s_2 są już bliskiemi wartości p i ~~wy~~ mniej się od niej różnią niż 10 tedy różnice s_1-p i s_2-p, ~~albo nie mniej wyłącznie ...~~ ~~$x-s_1$ i $x-s_2$~~ będą tak małe że pozostające tylko większego zbliżenia się, drugie i wyższe ich potęgi opuścić będzie można. Połóżmy teraz trzy wartości za x, t. j. p, s_1 i s_2 otrzymamy

F którego prawdziwym pierwiastkiem niech będzie $x=p$.

$$ap^\alpha+bp^\beta+cp^\gamma+dp^\delta+\ldots\ldots=0 \quad \text{bo } p \text{ jest pierwiastkiem}$$
$$as_1^\alpha+bs_1^\beta+cs_1^\gamma+ds_1^\delta+\ldots\ldots=B_1$$
$$as_2^\alpha+bs_2^\beta+cs_2^\gamma+ds_2^\delta+\ldots\ldots=B_2$$

Pierwsze z tych równań odejmując od każdego z następnych, otrzymamy:

$$a(s_1^\alpha-p^\alpha)+b(s_1^\beta-p^\beta)+c(s_1^\gamma-p^\gamma)+d(s_1^\delta-p^\delta)+\ldots\ldots=B_1$$
$$a(s_2^\alpha-p^\alpha)+b(s_2^\beta-p^\beta)+c(s_2^\gamma-p^\gamma)+d(s_2^\delta+p^\delta)+\ldots\ldots=B_2$$

Połóżmy $s_1-p=q_1$ a $s_2-p=q_2$ będą q_1 i q_2 błędami założeń. Ponieważ $s_1=p+q_1$, $s_2=p+q_2$, tedy bacząc że q_1 i q_2 są małemi i że drugie i wyższe potęgi ich opuścić można, mieć będziemy:

$$s_1^\alpha=(p+q_1)^\alpha=p^\alpha+\alpha p^{\alpha-1}q_1+\ldots \quad s_1^\beta=p^\beta+\beta p^{\beta-1}q_1, \quad s_1^\gamma=p^\gamma+\gamma p^{\gamma-1}q_1, \quad s_1^\delta=p^\delta+\delta p^{\delta-1}q_1 \text{ i t. d.}$$
$$s_2^\alpha=(p+q_2)^\alpha=p^\alpha+\alpha p^{\alpha-1}q_2+\ldots \quad s_2^\beta=p^\beta+\beta p^{\beta-1}q_2, \quad s_2^\gamma=p^\gamma+\gamma p^{\gamma-1}q_2, \quad s_2^\delta=p^\delta+\delta p^{\delta-1}q_2 \text{ i t. d.}$$

skąd

$$s_1^\alpha-p^\alpha=\alpha p^{\alpha-1}q_1, \quad s_1^\beta-p^\beta=\beta p^{\beta-1}q_1, \quad s_1^\gamma-p^\gamma=\gamma p^{\gamma-1}q_1, \quad s_1^\delta-p^\delta=\delta p^{\delta-1}q_1 \text{ i t. d.}$$
$$s_2^\alpha-p^\alpha=\alpha p^{\alpha-1}q_2, \quad s_2^\beta-p^\beta=\beta p^{\beta-1}q_2, \quad s_2^\gamma-p^\gamma=\gamma p^{\gamma-1}q_2, \quad s_2^\delta-p^\delta=\delta p^{\delta-1}q_2 \text{ i t. d.}$$

Te wartości dowolnie położywszy w dwóch ostatnich równaniach, znajdziemy

$$(a\alpha p^{\alpha-1}+b\beta p^{\beta-1}+c\gamma p^{\gamma-1}+d\delta p^{\delta-1}+\ldots\ldots)q_1=B_1$$
$$(a\alpha p^{\alpha-1}+b\beta p^{\beta-1}+c\gamma p^{\gamma-1}+d\delta p^{\delta-1}+\ldots\ldots)q_2=B_2$$

Dzieląc te równania przez siebie, otrzymamy nareszcie $\frac{q_1}{q_2}=\frac{B_1}{B_2}$.

(Z tej proporcyi czytamy to co w poprzedzającym § jako prawidło podane w dawnych Arytmetykach przywiodłem, że błędy podstawień czyli założeń są w stosunku prostym z błędami wypadków. Położywszy za q_1 i q_2 ich wartości będzie $\frac{s_1-p}{s_2-p}=\frac{B_1}{B_2}$ skąd $B_2s_1-B_2p=B_1s_2-B_1p$ zatém

$$p=\frac{B_1s_2-B_2s_1}{B_1-B_2} \;\#\; \frac{B_2s_1-B_1s_2}{B_2-B_1} \text{ albo, } p=\frac{B_2s_1-B_1s_2}{B_2-B_1}$$

, gdy odmienimy znaki w liczniku i mianowniku.

Wykonawszy naznaczone dzielenia znajdziemy ~~Z pierwszego wyrażenia znajdziemy~~ $p=s_2-\frac{B_2(s_1-s_2)}{B_1-B_2}$

a z drugiego . . . . $p=s_1-\frac{B_1(s_2-s_1)}{B_2-B_1}$

Oba wyrażenia dają tęż samą przybliżoną wartość pierwiastku p.

Znalazłszy wartość p przybliżoną, używa się jej do dalszego zbliżenia się biorąc ją za s_1 lub s_2 i postępuje się coraz dalej tąż samą drogą dopóki się nie otrzyma pierwiastku

pierwiastka tak blisko prawdziwego jak potrzeba wymaga.

Za przykład tego postępowania weźmy równanie z §28 użyte w sposobie Lagrange'a t.j. równanie $x^3-12x^2+57x-94=0$. Tam znaleźliśmy jego pierwiastek 3·3621659... w pięciu cyfrach dokładny, przeto tu weźmy $s_1=3·3$ a $s_2=3·4$. Obliczę podstawienia sposobem w §8 wskazanym, znajdziemy $B_1=-0·643$, $B_2=+0·384$, przeto $p=s_2-\frac{B_2(s_1-s_2)}{B_1-B_2}=3·4-0·037=3·363$. Uważając dalej $s_1=3·362$ a $s_2=3·363$, znajdziemy $B_1=-0·001694$, $B_2=+0·008525$, przeto $\frac{B_2(s_1-s_2)}{B_1-B_2}=+0·0008343$ a następnie $p=3·363-0·0008343=3·3621657$ t.j. przybliżenie już w siódmej cyfrze zupełnie dokładne.

Gdybyśmy teraz położyli $s_1=3·3621657$ a $s_2=3·3621658$ i znaleźlibyśmy $B_1=-0·0000015026$ a $B_2=+0·000000482977$, skąd $s_1-s_2=-0·0000001$ przeto $\frac{B_2(s_1-s_2)}{B_1-B_2}=+0·0000000242946$ a następnie

$p=3·3621657+0·0000000242946=3·362165724294....$

i t. d.

Ten tu rachunek potwierdza to co o tym pierwiastku znalezionym z poprzedniego sposobu Lagrange'a powiedzieliśmy, że jego ostatnia cyfra jest zupełnie pewną.

Ponieważ na początku przeszłego §fu wspomnieliśmy że reguła fałszywego założenia użytą także być może w równaniach przestępnych, zatém weźmy choćby jeden bardzo prosty przykład. Niechby potrzeba z równania $x^x=5$ znaleźć wartość x, ~~x, potrzeba x log. x = log. 5 = 0·69897000 czyli x log. x − 0·69897000 = 0~~ tedy położywszy $x=2$, znajdziemy wypadek -1; położywszy zaś $x=3$, znajdziemy na wypadek $+22$; widzimy więc że wartość x czyli pierwiastek tego równania leży między 2 i 3 i to niezawodnie bliżej liczby 2 niż 3, bo pierwszy wypadek daleko bliższym jest zera niż drugi.

Napisawszy dane równanie następnie $x\log. x=\log. 5$ czyli $x\log. x-\log. 5=0$ lub nareszcie $x\log x-0·69897000=0$, położymy tu $(x=)\,s_1=2·1$ tudzież $(x=)\,s_2=2·2$, tedy znajdziemy $B_1=-0·0223095$, $B_2=+0·0543599$; przeto $s_1-s_2=-0·1$ zatém

$\frac{B_2(s_1-s_2)}{B_1-B_2}=\frac{-0·00543599}{-0·0766694}=+0·071$, przeto $p=2·2-0·071=2·129$

Położywszy powtórnie $s_1=2·129$, $s_2=2·130$, znajdziemy $B_1=-0·0002839$, $B_2=+0·0004785$. Ale $s_1-s_2=-0·001$, więc $\frac{B_2(s_1-s_2)}{B_1-B_2}=\frac{-0·0000004785}{-0·0007624}=+0·000628$ a następnie bliższa wartość prawdziwego pierwiastka $p=2·130-0·000628=2·129372$

i t. d.

§32. Czwartym ze znanych sposobów rozwiązania równań liczbowych stopni wyższych o jednej niewiadomej, jest Franciszka Budana, podany przez niego w r. 1807. Zasadza on się na przerabianiu danego równania na inne a danemu równe, w którychby niewiadomą ilością były $x-1$, $x-2$, $x-3$, ... $x-p$ gdzie p może być liczbą całkowitą lub ułamkiem, dodatną lub odjemną. Dla ułatwienia tego przerobienia, mianowicie do obrachowania współczynników przerobionego równania, wprowadził Budan algorytm nie wymagający więcej działań arytmetycznych jak dodawania i odejmowania. Algorytm ten zależy na szeregach arytmetycznych sumowych, gdzie współczynniki danego równania są szeregiem pierwotnym, z którego wyprowadza się sumowy pierwszy, z tego sumowy drugi opuszczając ostatni wyraz, dalej z tego ostatniego sumowy trzeci opuszczając znowu jeden wyraz i t.d. aż przyjdziemy do pierwszego wyrazu. Ostatnie wyrazy tych szeregów są współczynnikami równania przerobionego. Niech np. będzie równanie dane $x^3-5x^2+x+7=0$. Szukając współczynników równania którego niewiadomą jest $x-1$ zamiast x, mamy:

współczynniki równania ...	1	−5	+1	+7
szereg sumowy pierwszy ..	1	−4	−3	+4
szereg sumowy drugi ...	1	−3	−6	
szereg sumowy trzeci ...	1	−2		
pierwszy wyraz ...	1			

współczynnikami przeto zrównania przerobionego są liczby 1, −2, −6, +4 tak że $(x-1)^3-2(x-1)^2-6(x-1)+4 = x^3-5x^2+x+7$.

Gdybyśmy chcieli zrównanie dane przerobić na inne którego by niewiadomą była $x-2$, dosyć ze współczynnikami ostatniego przerobionego postąpić tak samo jak postąpiliśmy ze współczynnikami danego; znajdziemy bowiem

współczynniki zrównania	1	−2	−6	+4
Szeregi sumowe będą . . .	1	−1	−7	−3
	1	0	−7	
	1	+1		
	1			

a przerobione zrównanie $(x-2)^3+(x-2)^2-7(x-2)-3 = x^3-5x^2+x+7$

Dalej znajdziemy tąż samą drogą zrównanie którego niewiadomą będzie $x-3$ następującym sposobem:

1	+1	−7	−3
1	+2	−5	−8
1	+3	−2	
1	+4		
1			

t. j. zrównanie $(x-3)^3+4(x-3)^2-2(x-3)-8 = x^3-5x^2+x+7$

i t. d.

Gdyby w danem zrównaniu brakowało jednego lub więcej wyrazów, do rachowania szeregów sum, zastąpić potrzeba ich współczynniki zerami.

Zastanowiwszy się bacznie nad tym sposobem postępowania, dostrzeżemy że algorytm przez Budana użyty wychodzi na to samo co się wyłożyło w §9 z tą tylko różnicą, że tam zamiast przerobionych zrównań pisać z niewiadomemi $x-1$, $x-2$, $x-3$ . . . pisaliśmy je zawsze z niewiadomą x, ale za to mówiliśmy że pierwiastki przerobionego zrównania są o 1, 2, 3, ... mniejsze niż założonego, co też rzeczywiście i z przerobienia Budana wypada. Algorytm nawet w powołanym §fie podany prędzej prowadzi do celu niż ten tu, chociaż tam użyć je przez potrzeba trzeciego działania t. j. mnożenia.

Otóż jeżeli w zrównaniu Budana, w którem niewiadoma jest $x-p$ ostatni wyraz będzie zero, $+p$ będzie pierwiastkiem zrównania. W powołanym też §fie widzieliśmy że jeżeli zmniejszając pierwiastki założonego zrównania o p, otrzyma się ostatni wyraz przerobionego równy zero, liczba p o którą się pierwiastki zmniejszało jest pierwiastkiem zrównania.

Można też szukać przerobionych zrównań mających za niewiadome $x+1$, $x+2$, $x+3$, . . . $x+p$, co znowu wychodzi na nasz rachunek powiększania pierwiastków danego zrównania o 1, 2, 3, . . . p.

Tym sposobem Budana odkrywają się wszystkie pierwiastki całkowite, a w ogólności wymierne i równe, skoro za p kłaść będziemy i ułamki! Doszedłszy do zrównania przerobionego z niewiadomą ~~p~~ $x-p$ w którem wszystkie współczynniki są dodatne, kończy się tu te przerobienia a ostatnie wyrazy (t. j. u nas w powołanym §fie wypadki z podstawień 0, 1, 2, 3 . . .) pokażą pomiędzy którémi liczbami leżą pierwiastki dodatne, bo o takich tylko się mówi; gdzie bowiem ostatnie wyrazy przeciwnemi znaki mają tam z pewnością leży przynajmniej jeden pierwiastek. Liczba p czyniąca wszystkie współczynniki przerobionego ostatniego zrównania, uważaną jest, i jest rzeczywiście wyższą granicą pierwiastków dodatnych.

Jak się potem zbliżać można, a zawsze tąż samą drogą do prawdziwego pierwiastka, ciekawi znajdą w dziele „Nouvelle méthode pour la résolution des équations numeriques par Budan. Paris 1822” bo dla wielości przerobień sposób ten mało był dotąd używany, dlaczego i ja więcej o nim nie powiem.

Sposób Gräffego.

§33. Gräffe, profesor w Zurichu, odpowiadając na zadanie ogłoszone przez berlińską akademiję umiejętności, podał ~~znow~~ w r. 1837 zupełnie nowy a bardzo genijalny sposób rozwiązania zrównań liczbowych wyższych stopni. To zaś co brakowało temu sposobowi do całkowitego rozwiązania w każdym przypadku i każdego zrównania, mianowicie zaś co do ścisłego a jednak prostego obrachowania pierwiastków urojonych, oraz ułatwienie postępowania z pierwiastkami bardzo blisko siebie leżącemi, a nakoniec sposób przybliżenia się do prawdziwych wartości pierwiastków tak jak tylko chcemy, podał wraz z ogólnem rozwiązaniem Gräffego s. p. Encke dyrektor Obserwatoryjum astronomicznego berlińskiego w piśmie „Astronomisches Jahrbuch für 1841".

Istotą w mowie będącego sposobu jest dowiedzione przez Gräffego twierdzenie, że, umiejąc dane zrównanie przerobić na inne, którego by pierwiastki były wyższemi potęgami pierwiastków założonego, ~~i~~ ze współczynników zrównania przerobionego, znaleźć można pierwiastki założonego. Tym sposobem obejść się można bez mozolnego często, szukania granic pierwiastków oraz ich natury przystępując wprost do rozwiązania zrównania. Niemałą też jest zaletą tego sposobu, że się daje użyć w każdym stopniu a nigdy nie prowadzi do zrównań wyższych stopni jak zrównanie dane, ani też do rachunków których by wykonać nie można. Ale zobaczmy dowód powyższego twierdzenia które sobie Gräffe założył i dowiódł.

Rozwiązanie zrównań liczbowych ma rzeczywiście za cel znalezienie czynników linijowych (: pierwiastkowych :) z których przez mnożenie między sobą otrzymuje się pewna funkcyja zwyczajnie wielomianem zrównania nazwana, która dla pewnych wartości ilości nieznanej staje się $=0$. W linijowych czynnikach ilość znana nazywa się pierwiastkiem. Tak np. w czynniku $x+a$, znana ilość a, za jaką się tu uważać potrzeba, będzie pierwiastkiem. Nie mając względu na znak tego pierwiastka który może być dodatnym lub odjemnym, uważanie każdego z czynników pod powyższą postacią, ułatwi nam baczenie na znaki. Przypuściwszy bowiem, że dane zrównanie ma same pierwiastki dodatne, według używanego wyrażania się, toż zrównanie miałoby same przemiany znaków, według zaś teraźniejszego przyjęcia mieć będzie same następstwa znaków.

Jeżeli wszystkie pierwiastki danego zrównania są rzeczywiste i różne, powinno koniecznie musiało z iloczynu złożonego z czynników powyższej postaci t. j.

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(\ldots\ldots) = 0$$

Z §5 wiadomo, że współczynniki mnożące różne potęgi nieznanej ilości x, po rzeczywistem wykonaniu rzeczonego mnożenia, są funkcyjami symetrycznemi złożonemi według nauki o połączeniach (: kombinacyjach :) z pierwiastków jako elementa uważanych i branych po 1, 2, 3, 4 i t. d. tak, że każdy współczynnik jest sumą podobnych połączeń. W naszym przypadku, gdzie przyjęliśmy za pierwiastki $a, b, c, d, e, f \ldots\ldots$ jak się pokazało w powołanym wyżej paragrafie, $a+b+c+d+e+f+\ldots$ jest współczynnikiem drugiego wyrazu czyli współczynnikiem potęgi x^{n-1}; współczynnikiem potęgi x^{n-2} czyli trzeciego wyrazu jest suma dwójek $ab+ac+ad+ae+af+\ldots+bc+bd+be+\ldots+cd+ce+cf+\ldots+\ldots$ współczynnikiem następnego wyrazu jest suma $abc+abd+abe+\ldots+acd+ace+\ldots+\ldots$ zgoła suma wszystkich

trójek z pierwiastków a, b, c, d .... Współczynnik dalszego wyrazu będzie sumą ~~par~~ czwórek, dalej piątek i t.d. i t.d. a wszystkie połączenia bez powtórzenia. Oznaczywszy teraz te różne sumy połączeń przez Σa, Σab, Σabc, $\Sigma abcd$ i t.d. gdzie grecka głoska Σ znaczy wyraz sumą i w całej Matematyce prawie wyłącznie w tém znaczeniu jest używaną, tedy powyższe zrównanie po wykonaniu mnożenia i uporządkowaniu wielomianu według malejących potęg ilości x przybiera postać następującą

$$x^n + \Sigma a x^{n-1} + \Sigma ab\, x^{n-2} + \Sigma abc\, x^{n-3} + \Sigma abcd\, x^{n-4} + \ldots\ldots = 0$$

Z współczynników takiego zrównania można znaleźć wszystkie funkcyje symetryczne i takowe obrachować w liczbach, lubo nam same pierwiastki całkiem nieznane. Jeżeli więc ostatnie zrównanie przerobimy na inne którego by pierwiastki były wysokiemi potęgami tego zrównania np m^{temi} potęgami, będziemy też mogli obrachować w liczbach sumy Σa^m, $\Sigma a^m b^m$, $\Sigma a^m b^m c^m$, $\Sigma a^m b^m c^m d^m$, i t.d. t.j. będziemy mogli obrachować współczynniki zrównania którego pierwiastki są m^{temi} potęgami pierwiastków zrównania założonego, a które będzie postaci

$$x^n + \Sigma a^m x^{n-1} + \Sigma a^m b^m x^{n-2} + \Sigma a^m b^m c^m x^{n-3} + \ldots\ldots = 0$$

gdzie potęga m wziętą być może do upodobania wysoką.

Przypatrzmy się do takiego zrównania, zobaczmy jak z jego współczynników znajdziemy pierwiastki a, b, c, d, ... Ponieważ z początku założyliśmy że wszystkie pierwiastki są realne i między sobą różne, tudzież, ponieważ nie mamy względu na ich znaki ale tylko na liczbową ich wartość, przypuśćmy że

$a > b > c > d > e > f >$ i t.d. t.j. że pierwiastek a jest największym, potém b, dalej c i t.d. Jeżeli m jest bardzo wielkiem, tedy w zrównaniu $\Sigma a^m = a^m + b^m + c^m + d^m + e^m + f^m + \ldots$, f^m w porównaniu z e^m prawie zupełnie czyli opuszczoném być może; też samo stanie się z e^m w porównaniu z d^m, dalej z d^m w porównaniu z c^m, z c^m w porównaniu z b^m a nareszcie z b^m w porównaniu z a^m, co nie trudno pojąć wziąwszy sobie tylko trzy liczby np 4, 3, 2 i każdą z nich podniósłszy tylko do potęgi np 10^{tej}. Znajdziemy bowiem $4^{10} = 1048576$, $3^{10} = 68049$, $2^{10} = 1024$, z czego widzimy jak niezmiernie prędko też same potęgi liczb o 1 tylko różnych rosną. Kiedy tak jest, więc przy m bardzo wielkiem, ostatnie zrównanie zemieni się na $\Sigma a^m = a^m$. Dla tej samej przyczyny następny współczynnik $\Sigma a^m b^m = a^m b^m + a^m c^m + \ldots + b^m c^m + b^m d^m + \ldots$ zamieni się na $\Sigma a^m b^m = a^m b^m$, i podobnież $\Sigma a^m b^m c^m = a^m b^m c^m$ i t.d. Przy ciągłym zatém wzroście potęgi m, powyższe zrównanie przybierze koniecznie kiedyś postać następującą:

$$x^n + a^m x^{n-1} + a^m b^m x^{n-2} + a^m b^m c^m x^{n-3} + a^m b^m c^m d^m x^{n-4} \ldots\ldots = 0$$

Mając tego ostatniego zrównania współczynniki obrachowane w liczbach, otrzymamy m^{te} potęgi pierwiastków jak następuje

a^m, $b^m = \frac{a^m b^m}{a^m}$, $c^m = \frac{a^m b^m c^m}{a^m b^m}$, $d^m = \frac{a^m b^m c^m d^m}{a^m b^m c^m}$, i t.d. a wyciągnąwszy m^{te} pierwiastki, otrzymamy pierwiastki zrównania założonego.

Zapewne tu każdy wyrwie się zapyta, a jakże wiedzieć że potęga m jest

jest już dostatecznie wysokie, aby można wyrachować pierwiastki zrównania ze współczynników przerobionego? Na to następnie odpowiadam: przechodząc z potęgi m do innej wyższej m' czyli ze zrównania

$$x^n+\Sigma_1 a^m x^{n-1}+\Sigma_1 a^m b^m x^{n-2}+\ldots\ldots=0$$

do zrównania

$$x^n+\Sigma_1 a^{m'} x^{n-1}+\Sigma_1 a^{m'} b^{m'} x^{n-2}+\ldots\ldots=0$$

jeżeli m już dosięgło potrzebnej granicy, współczynniki tejże samej potęgi nieznanej x w obu zrównaniach mieć się do siebie powinny jak m^{ta} potęga jakiejkolwiek ilości do m'^{tej} potęgi tejże samej ilości; albo, jeżeli mamy logarytmy współczynników, a zobaczymy że te wszystkie przerobienia za pomocą logarytmów odbywamy: i pewnej potęgi w obu zrównaniach które oznaczymy przez $\log.\alpha_m$ i $\log.\alpha_{m'}$, być powinno $\frac{1}{m}\log\alpha_m=\frac{1}{m'}\log\alpha_{m'}$ czyli $\log.\alpha_{m'}=\frac{m'}{m}\log.\alpha_m$ i ten stosunek powinien być stałym dla wszystkich współczynników, co zawsze jest możebnem biorąc tylko m dostatecznie wielkie. Pozna się ten przypadek bardzo łatwo na samo spojrzenie na współczynniki, ~~które~~ bo wszystkie są kwadratami współczynników odpowiednich zrównania poprzedzającego, t.j. ponieważ te współczynniki są, jak wspomniałem, logarytmami, każdy powinien być podwojonym odpowiedniego współczynnika poprzedniego zrównania. Można też uważać przerobienia za skończone wtedy, gdy[F]

Lecz tu nowe zachodzi pytanie, jakże wielomian zrównania podnosić do tak wysokiej potęgi, kiedy przecież zwyczajną drogą, rachunek ten jest nie do wykonania? Otóż Gräffe zauważył że do zrównania którego by pierwiastki były wysokiemi potęgami pierwiastków zrównania danego, przyjść można stopniowo przerabiając najprzód zrównanie którego wszystkie pierwiastki przez a, b, c, d... oznaczyliśmy na inne, którego by pierwiastkami były $a^p, b^p, c^p, d^p\ldots$ t.j. p^{temi} potęgami pierwiastków pierwszych. To ostatnie zrównanie przerabia się znowu tymże sposobem na inne którego by pierwiastki były również p^{temi} potęgami pierwiastków poprzedzającego; będą one więc stopnia p^2. Z ostatniego zrównania otrzymamy tąż samą drogą pierwiastki które będą znowu p^{temi} potęgami poprzedzającego t.j. będą p^3 stopnia p^3 pierwiastków danego zrównania. Tak dalej, a zawsze tymże samym sposobem postępując, otrzymamy następnie zrównania których pierwiastki będą

$$\begin{array}{lllll}
a^p, & a^{p^2} & a^{p^3} & a^{p^4} & a^{p^5} \\
b^p & b^{p^2} & b^{p^3} & b^{p^4} & b^{p^5} \\
c^p & c^{p^2} & c^{p^3} & c^{p^4} & c^{p^5} \\
d^p & d^{p^2} & d^{p^3} & d^{p^4} & d^{p^5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\quad \text{i t. d.}$$

gdzie ponieważ m równa się pewnej potędze p, tedy m bardzo prędko rośnie, tak że biorąc za p nawet najmniejszą liczbę 2, można już przeskoczyć do wysokich potęg. Niech bowiem danem do rozwiązania zrównaniem będzie

$$x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\alpha_2 x^{n-2}+\alpha_3 x^{n-3}+\alpha_4 x^{n-4}+\alpha_5 x^{n-5}+\ldots\ldots+\alpha_n=0$$

którego pierwiastki są a, b, c, d, e ...., tedy, ponieważ to zrównanie powstaje, jak się wyżej powiedziało z czynników linijowych postaci $x+a$, $x+b$, $x+c$ i t.d., t.j. wielomian tego zrównania wypada z naznaczonego iloczynu

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)(\ldots\ )=0$$

pisząc w tych czynnikach $x^{\frac{1}{2}}$ za x, mieć będziemy

$$(x^{\frac{1}{2}}+a)(x^{\frac{1}{2}}+b)(x^{\frac{1}{2}}+c)(x^{\frac{1}{2}}+d)(x^{\frac{1}{2}}+e)(\ldots=0$$

a znosząc w tém ostatniém zrównaniu wszystkie znaki pierwiastkowe, otrzymamy

$$(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2)(x-d^2)(x-e^2)(\ldots=0$$

Chcąc zaś otrzymać pierwiastki dodatnie, według naszego teraźniejszego rozumienia potrzeba przemienić znaki wyrazów stojących na miejscach parzystych, naprzemian, co na to samo wychodzi jak w ostatniém zrównaniu przemienić wszystkie znaki — na +. To więc zrównanie będzie

$$(x+a^2)(x+b^2)(x+c^2)(x+d^2)(x+e^2)(\ldots=0$$

Znosząc znaki pierwiastkowe najłatwiej trafimy do celu wychodząc z zasady, że gdy $p+q=0$, także $p^2-q^2=0$. Rozebrawszy przeto dane zrównanie

[F] dostrzeżemy że kwadrat którego-kolwiek współczynnika tak przewyższa podwójny iloczyn współczynników dwóch z lewej i prawej strony stojących, że ten ostatni nie ma już żadnego wpływu na piątą cyfrę; bo pięcio cyfrowe logarytmy dają nam tylko pięć cyfer pewnych: gdyż tym sposobem nie zmiennie mało różne ~~wypadki~~ od pierwszych wypadki otrzymamy. W ogólności, jeżeli stosunek pomiędzy dwoma najbliższemi pierwiastkami jest = 1·1, m być musi = 128 = 2^7. Jeżeli zaś rzeczony stosunek jest = 1·01, potrzeba przerobienia pociągnąć do m = 1024 = 2^{10} lub nawet do m = 2^{11}. Nareszcie, gdyby pierwiastki tak bliskiemi siebie były, co się rzadko wydarza, iżby rzeczony stosunek był = 1·001, i tak nie dalej pociągnie się przerobienia jak do m = 2^{14}. Z tego się pokazuje iż w największej przypadków wystarcza siedm przerobień t.j. gdy m = 2^7.

na dwie części takie żeby każda po podniesieniu jej do kwadratu wolną była od niewymierności czyli od znaków pierwiastkowych, przez tém samém dopięliśmy celu. Takiemi częściami naszego ogólnego wyżej założonego, a zatém i każdego zrównania mogą być następujące:

$$x^{\frac{n}{2}} + \alpha_2 x^{\frac{n-2}{2}} + \alpha_4 x^{\frac{n-4}{2}} + \alpha_6 x^{\frac{n-6}{2}} + \alpha_8 x^{\frac{n-8}{2}} + \alpha_{10} x^{\frac{n-10}{2}} + \dots$$

tudzież $\alpha_1 x^{\frac{n-1}{2}} + \alpha_3 x^{\frac{n-3}{2}} + \alpha_5 x^{\frac{n-5}{2}} + \alpha_7 x^{\frac{n-7}{2}} + \alpha_9 x^{\frac{n-9}{2}} + \alpha_{11} x^{\frac{n-11}{2}} + \dots$

Kwadraty tych części są:

pierwszy $$x^n + 2\alpha_2 x^{n-1} + \begin{array}{l}\alpha_2^2\\ +2\alpha_4\end{array}\Bigg| x^{n-2} + \begin{array}{l}2\alpha_2\alpha_4\\ +2\alpha_6\end{array}\Bigg| x^{n-3} + \begin{array}{l}\alpha_4^2\\ +2\alpha_2\alpha_6\\ +2\alpha_8\end{array}\Bigg| x^{n-4} + \begin{array}{l}2\alpha_4\alpha_6\\ +2\alpha_2\alpha_8\\ +2\alpha_{10}\end{array}\Bigg| x^{n-5} + \dots$$

drugi $$\alpha_1^2 x^{n-1} + \alpha_1\alpha_3 x^{n-2} + \begin{array}{l}\alpha_3^2\\ +2\alpha_1\alpha_5\end{array}\Bigg| x^{n-3} + \begin{array}{l}2\alpha_3\alpha_5\\ +2\alpha_1\alpha_7\end{array}\Bigg| x^{n-4} + \begin{array}{l}\alpha_5^2\\ +2\alpha_3\alpha_7\\ +2\alpha_1\alpha_9\end{array}\Bigg| x^{n-5} + \dots$$

Biorąc różnicę tych kwadratów i odmieniając znaki stósownie do wyżej zrobionej uwagi, otrzymamy zrównanie

$$x^n + \begin{array}{l}\alpha_1^2\\ -2\alpha_2\end{array}\Bigg| x^{n-1} + \begin{array}{l}\alpha_2^2\\ -2\alpha_1\alpha_3\\ +2\alpha_4\end{array}\Bigg| x^{n-2} + \begin{array}{l}\alpha_3^2\\ -2\alpha_2\alpha_4\\ +2\alpha_1\alpha_5\\ -2\alpha_6\end{array}\Bigg| x^{n-3} + \begin{array}{l}\alpha_4^2\\ -2\alpha_3\alpha_5\\ +2\alpha_2\alpha_6\\ -2\alpha_1\alpha_7\\ +2\alpha_8\end{array}\Bigg| x^{n-4} + \begin{array}{l}\alpha_5^2\\ -2\alpha_4\alpha_6\\ +2\alpha_3\alpha_7\\ -2\alpha_2\alpha_8\\ +2\alpha_1\alpha_9\\ -2\alpha_{10}\end{array}\Bigg| x^{n-5} + \begin{array}{l}\alpha_6^2\\ -2\alpha_5\alpha_7\\ +2\alpha_4\alpha_8\\ -2\alpha_3\alpha_9\\ +2\alpha_2\alpha_{10}\\ -2\alpha_1\alpha_{11}\\ +2\alpha_{12}\end{array}\Bigg| x^{n-6} + \dots = 0$$

którego pierwiastki będą $a^2, b^2, c^2, d^2, e^2 \dots$. Skład współczynników tego zrównania, wskazuje nam nader łatwą drogę która do niego przyjdziemy. Zastanowiwszy się bowiem z uwagą nad temiż współczynnikami, bez trudności dostrzeżemy prawo według którego są złożone ze współczynników danego, mianowicie dostrzeże się że współczynnik mnożący którąkolwiek potęgę niewiadomej x w ostatniém, składa się z kwadratu współczynnika mnożącego tęż samą potęgę w danem zrównaniu, (a z postępem rachunku kwadratowi współczynnika tejże samej potęgi w zrównaniu już poprzednio otrzymaném) oraz z podwójnych iloczynów współczynników wyrazów jednakowo z prawej i lewej strony od tego wyrazu odległych, biorąc też iloczyny ze znakami naprzemian różnemi.

Wziąwszy p=3, moglibyśmy tym samym sposobem i za daleko mniejszą liczbą przerobień przyjść do zrównania o pierwiastkach wysokich potęg, lecz pokażemy czy równie jak powyżej bardzo prostym rachunkiem.

W razie przyjęcia $p=3$, weźmiwszy jakiekolwiek trzy ilości p, q, r, ponieważ $(p+q+r)^3 = p^3+q^3+r^3+3(p+q+r)(pq+pr+qr) - 3pqr$ widzimy że położywszy $p+q+r=0$, otrzymamy też $p^3+q^3+r^3-3pqr=0$. Z tej zatem zasady wychodząc że gdy suma jakichkolwiek trzech ilości równa się zero, że też suma trzecich potęg tychże samych ilości zmniejszona potrójnym ich iloczynem jest także równa zero, możemy dojść do zrównania którego pierwiastki będą sześcianami pierwiastków założonego, a jednak wolnego od niewymierności. Skoro bowiem w danem zrównaniu, jak poprzednio, położymy $x^{\frac{1}{3}}$ za x a potém zniesiemy czyli uwolnimy zrównanie od wszystkich znaków pierwiastkowych, otrzymamy

$$(x+a^3)(x+b^3)(x+c^3)(x+d^3)(\dots = 0$$

Chodzi tu tylko o to, jak z niewielkim zachodem znieść te znaki pierwiastkowe? Oto, powiada Gräffe, dosyć jest dane zrównanie rozłożyć na trzy takie części z których każda podniesiona do sześcianu oraz iloczyn tychże części były wolnemi od niewymierności, co zawsze jest możebném, a już osiągniemy cel zamierzony. Trzema rzeczonemi częściami założonego zrównania w każdym razie być mogą:

$$\cancel{x^{\frac{n}{3}}+\alpha_3 x^{\frac{n-3}{3}}+\alpha_6 x^{\frac{n-6}{3}}}$$

$$x^{\frac{n}{3}}+\alpha_3 x^{\frac{n-3}{3}}+\alpha_6 x^{\frac{n-6}{3}}+\alpha_9 x^{\frac{n-9}{3}}+\ldots\ldots=x^{\frac{n}{3}}(1+\alpha_3 x^{-1}+\alpha_6 x^{-2}+\alpha_9 x^{-3}+\ldots)=A$$

$$\alpha_1 x^{\frac{n-1}{3}}+\alpha_4 x^{\frac{n-4}{3}}+\alpha_7 x^{\frac{n-7}{3}}+\alpha_{10} x^{\frac{n-10}{3}}+\ldots\ldots=x^{\frac{n-1}{3}}(\alpha_1+\alpha_4 x^{-1}+\alpha_7 x^{-2}+\alpha_{10} x^{-3}+\ldots)=B$$

$$\alpha_2 x^{\frac{n-2}{3}}+\alpha_5 x^{\frac{n-5}{3}}+\alpha_8 x^{\frac{n-8}{3}}+\alpha_{11} x^{\frac{n-11}{3}}+\ldots=x^{\frac{n-2}{3}}(\alpha_2+\alpha_5 x^{-1}+\alpha_8 x^{-2}+\alpha_{11} x^{-3}+\ldots)=C$$

Każda z tych części podniesiona do potęgi trzeciej oraz ich iloczyn wolne mają od znaków pierwiastkowych. Złożywszy teraz ilość, jak się wyżej pokazało $A^3+B^3+C^3-3ABC$; otrzymamy pierwsze wyrazy:

$x^n+\alpha_1^3$	$x^{n-1}+\alpha_2^3$	$x^{n-2}+\alpha_3^3$	$x^{n-3}+\ldots\ldots=0$
$-3\alpha_1\alpha_2$	$+3\alpha_1^2\alpha_4$	$-3\alpha_1\alpha_8$	
$+3\alpha_3$	$-3\alpha_1\alpha_5$	$+3\alpha_1^2\alpha_7$	
	$-3\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	$-3\alpha_1\alpha_2^2\alpha_6$	
	$-3\alpha_2\alpha_4$	$-3\alpha_1\alpha_3\alpha_5$	
	$+3\alpha_3^2$	$+3\alpha_1\alpha_4^2$	
	$+3\alpha_6$	$+3\alpha_2^2\alpha_5$	
		$-3\alpha_2\alpha_3\alpha_4$	
		$-3\alpha_2\alpha_7$	
		$-3\alpha_4\alpha_5$	
		$+6\alpha_3\alpha_6$	
		$+3\alpha_9$	

Porównawszy ten wypadek z wypadkiem wprzód otrzymanym gdy przyjęliśmy $p=2$, zaraz dostrzeżemy, że jako potęgi 2, 4, 8, 16, 32 i t.d. wolniej rosną niż potęgi 3, 9, 27, 81 i t.d. to pierwsze wypadki w pierwszym przypadku tak są proste i łatwe do zatrzymania w pamięci, że jest każdy chętniej zgodzi się na wykonanie kilku przerobień więcej w przypadku $p=2$, niż się obejść nawet połową przerobień w przypadku $p=3$; pierwsze bowiem przerobienia ukończą się daleko prędzej niż drugie i nie jesteśmy wystawieni na omyłki, bardzo łatwo w drugiem przerobieniu popełnić się mogące. Przydawszy jeszcze do tego okoliczność że w przypadku gdy p jest parzystem, różnica między pierwiastkami dodatnemi i odjemnemi zaraz z początku znika, gdy przeciwnie, w przypadku p nieparzystego ta różnica nadal pozostaje, poprzestaniemy niezawodnie dla wszystkich równań przy $p=2$.

Z przyjęcia p parzystego jest jeszcze i ta niemała korzyść, iż poznawszy liczbowe wartości pierwiastków a niebędąc ich znaków pewnymi, proste podstawienie, po odłączeniu potęg parzystych od nieparzystych, znosi wątpliwość znaków.

Podstawienia znalezionych wartości pierwiastków nie można ani tu, nie mając nawet względu na ~~xx~~ przekonanie się o ich dokładności, bo nie można, ani się nawet radzi zaraz z początku posuwać dokładność do stopnia jaki otrzymać chcemy.

Cały rachunek czyli rzeczone przerabiania równań odbywają się logarytmami i pięciocyfrowe logarytmy przekładać potrzeba nad więcej cyfrowe z powodu że są wówczas wygodniejsze i prędzej do celu prowadzą nie szkodząc nic dokładności, bo po dwóch lub trzech przerobieniach przyjdziemy do logarytmów współczynników że nawet pięcio- i dziesięciocyfrowe logarytmy nie mogłyby nam dać liczb odpowiadających dokładnych ale tylko pierwsze najwyższe. Ten przypadek wtedy się najwyraźniej wydarza, gdy jeden lub kilka pierwiastków mają cyfry całkowite.

Rachując pięciocyfrowemi logarytmami, kiedy po wyciągnięciu pierwiastków potęgi m-tej z a^m, b^m, c^m i t.d. otrzymuje się wartość pierwiastków tak bliską, że piąta a czasem i szósta cyfra jest dokładną. A mając pierwiastki już tak bliskie prawdziwych i wszystkie poodzielane, dosyć jest użyć sposobu Newtona lub też reguły fałszywego założenia ażeby się jeszcze więcej i tak jak chcemy zbliżyć do prawdziwej wartości każdego pierwiastka. Bo sposób Newtona, jak wiadomo, byłby wtedy tylko niepewnym, gdyby wartość pierwiastka który poprawiamy i od którego wychodzimy, była bliską nie jednego ale kilku innych pierwiastków.

Znajomy wzór Newtona na poprawkę którą tu przez p oznaczymy a pierwiastek poprawiany przez x_1, można dla ułatwienia rachunku i tak napisać

$$p=-\frac{f(x_1)}{f_1(x_1)}=-\frac{x_1^n+\alpha_1 x_1^{n-1}+\alpha_2 x_1^{n-2}+\alpha_3 x_1^{n-3}+\ldots+\alpha_n}{n x_1^{n-1}+(n-1)\alpha_1 x^{n-2}+(n-2)\alpha_2 x^{n-3}+\ldots+\alpha_{n-1}}=-x_1\left(\frac{x_1^n+\alpha_1 x_1^{n-1}+\alpha_2 x_1^{n-2}+\ldots+\alpha_n}{n x_1^n+(n-1)\alpha_1 x^{n-1}+(n-2)\alpha_2 x^{n-2}+\ldots+\alpha_{n-1}x_1}\right)$$

gdzie widzimy z licznika bardzo łatwo znajduje się mianownik.

Dla uwidocznienia całego postępowania, szukajmy pierwiastków równania $x^6 - 22x^5 + 180x^4 - 658x^3 + 911x^2 + 204x - 924 = 0$

Ponieważ to równanie ma tylko jedno następstwo a resztę same powtórzenia znaków, zatem jeżeli wszystkie jego pierwiastki są rzeczywistemi, jeden tylko będzie odjemnym a pięć dodatnemi.

Z powodu że współczynniki są liczbami całkowitemi i niewielo cyfrowemi, przeto zatem przerobienie równania uskutecznimy na liczbach ścisłych, stąd otrzymamy równanie

$$x^6 + 124x^5 + 5270x^4 + 97876x^3 + 765745x^2 + 1725144x + 853776 = 0$$

którego pierwiastki są kwadratami pierwiastków równania założonego t.j. pierwiastki są stopnia 2^1.

Używszy teraz logarytmów pięcio cyfrowych, znajdziemy następnie

<u>Równanie którego pierwiastki są stopnia 2^2</u>

$$x^6 + 3.68449x^5 + 6.70157x^4 + 9.28661x^3 + 11.41107x^2 + 12.22236x + 11.86269 = 0$$

<u>Pierwiastki stopnia 2^3</u>

$$x^6 + 7.12473x^5 + 12.85144x^4 + 18.06707x^3 + 22.77776x^2 + 24.38177x + 23.72538 = 0$$

<u>Pierwiastki stopnia 2^4</u>

$$x^6 + 14.21325x^5 + 25.29107x^4 + 35.70788x^3 + 45.55484x^2 + 48.75874x + 47.45076 = 0$$

<u>Pierwiastki stopnia 2^5</u>

$$x^6 + 28.42588x^5 + 50.33304x^4 + 71.07994x^3 + 91.10968x^2 + 97.59746x + 94.90152 = 0$$

<u>Pierwiastki stopnia 2^6</u>

$$x^6 + 56.85176x^5 + 100.60144x^4 + 141.94988x^3 + 182.21936x^2 + 195.19492x + 189.80304 = 0$$

<u>Pierwiastki stopnia 2^7</u>

$$x^6 + 113.70352x^5 + 201.19940x^4 + 283.82054x^3 + 364.43872x^2 + 390.38984x + 379.60608 = 0$$

<u>Pierwiastki stopnia 2^8</u>

$$x^6 + 227.40704x^5 + 402.39879x^4 + 567.63236x^3 + 728.87744x^2 + 780.77968x + 759.21216 = 0$$

<u>Pierwiastki stopnia 2^9</u>

$$x^6 + 454.81408x^5 + 804.79758x^4 + 1135.26463x^3 + 1457.75488x^2 + 1561.55936x + 1518.42432 = 0$$

W tem ostatniem równaniu wszystkie współczynniki są kwadratami współczynników równania poprzedzającego, przeto tu kończą się przerobienia. Ponieważ $2^9 = 512$, więc znacząc pierwiastki a, b, c, d, e, f przez $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ jak to zwyczajnie czynimy, otrzymamy logarytmy 512tej potęgi każdego pierwiastka, jak następuje

$$\log. x_1^{512} = 454.81408$$
$$\log. x_2^{512} = 804.79758 - 454.81408 = 349.98350$$
$$\log. x_3^{512} = 1135.26463 - 804.79758 = 330.46705$$
$$\log. x_4^{512} = 1457.75488 - 1135.26463 = 322.49025$$
$$\log. x_5^{512} = 1561.55936 - 1457.75488 = 103.80448$$
$$\log. x_6^{512} = 1518.42432 - 1561.55936 = \sout{0.91575 - 1 = 9.91575}\ 468.86496 - 512$$

Stąd

$\log. x_1 = 0.88831$ $\log. x_4 = 0.62986$
$\log. x_2 = 0.68356$ $\log. x_5 = 0.20274$
$\log. x_3 = 0.64544$ $\log. x_6 = 0.91575 - 1 = 9.91575$

Chcąc się dowiedzieć który z tych pierwiastków jest odjemnym, zamiast podstawiania każdego z nich, dosyć poszukać granicy wyższej pierwiastków odjemnych równania założonego, lub też, co jeszcze się prędzej uskuteczni, ponieważ dla $x = 0$ jest $f(x) = -924$ a dla $x = 1$, $f(x) = +644$ co pokazuje że między 0 i [illegible] czyli rzeczywiście między 0 i -1 znajduje się pierwiastek równania, wnieśjemy zatem że pierwiastek najmniejszy którego logarytm powyżej znaleźliśmy, t.j. pierwiastek x_6 jest odjemnym.

Wziąwszy teraz każdemu z powyższych logarytmów odpowiadające liczby, mieć będziemy przybliżone pierwiastki równania założonego.

Tak mając zbliżone pierwiastki, takowe jeśli bądź to przy pomocy sposobu Newtona, bądź też, co może wygodniej, reguły fałszywego założenia znaleźć pierwiastki bliższe prawdziwych. Tak np. pierwszemu logarytmowi odpowiada liczba 7·7324; wziąwszy tylko trzy cyfry dziesiętne bo ostatnia niepewna, i położywszy raz $s_1=7·732$ a drugi raz $s_2=7·733$, znajdziemy, rachując w 9ciu cyfrach dziesiętnych $B_1=-0·089208906$ a $B_2=+1·668591133$. Ponieważ więc $s_1-s_2=-0·001$, przeto poprawka wypadnie $+0·0009492$, a następnie pierwiastek bliższy prawdziwego $x_1=7·733-0·0009492=7·7320508$ którego jeszcze ostatnia cyfra jest prawdziwą. Tym samym sposobem postąpić należy i z innemi.

Szukajmy jeszcze pierwiastków równania $f(x)=x^3-7x+7=0$. Pierwsze dwa przerobienia odbywszy na liczbach a resztę logarytmami, otrzymamy

Równanie którego pierwiastki są kwadratami czyli potęgi 2^1

$$x^3+14x^2+49x+49=0$$

Pierwiastki potęgi 2^2

$$x^3+98x^2+1029x+2401=0$$

Pierwiastki potęgi 2^3

$$x^3+3·87772x^2+5·76956x+6·76078=0$$

Pierwiastki potęgi 2^4

$$x^3+7·74637x^2+11·41667x+13·52156=0$$

Pierwiastki potęgi 2^5

$$x^3+15·49267x^2+22·80905x+27·04312=0$$

Pierwiastki potęgi 2^6

$$x^3+30·98534x^2+45·61810x+54·08624=0$$

Pierwiastki potęgi 2^7

$\xcancel{x^3+61·97068x^2+91·20658x+108·17248=0}$

Ze współczynników ostatniego równania wypada

$\log x_1=\frac{30·98534}{64}$, $\log x_2=\frac{14·63276}{64}$, $\log x_3=\frac{8·46814}{64}$

a następnie $\log x_1=0·48415$, $\log x_2=0·22864$, $\log x_3=0·13232$

co do znaków tych pierwiastków, tedy zastąpiwszy brakujący wyraz w danem równaniu wyrazem $\pm 0x^2$, dostrzeżemy że dwa pierwiastki są dodatnie a jeden odjemny. Aby rozstrzygnąć czy też [samych pierwiastków] podstawienia który jest od pierwszych, znajdzie się takowe granice, większe pierwiastków odjemnych 4. Położywszy więc $x=-4$ wypadnie $f(-4)=-29$, kiedy zaś $x=-3$, wypadnie $f(-3)=+1$ zatem między -4 i -3 leży jeden pierwiastek a mianowicie największy ze znalezionych.

F Może nie będzie zbytecznem jeszcze jeden przykład. Szukajmy więc pierwiastków równania (α)

F Co się dotąd powiedziało o sposobie Gräffego rozumieć należy, jak to z początku ostrzegłem, o takich tylko równaniach, których pierwiastki wszystkie są rzeczywiste. Jeśli równanie ma i pierwiastki urojone, pozna się to w samych przerobieniach, bo znaki odjemne pokażą się w jednem lub więcej przerobionych równaniach. Na taki przypadek podał Encke w przywiedzionym na początku roczniku sposób, wprowadzając funkcje trygonometryczne, mianowicie kiedy w urojonych czynnikach liniowych $x+\alpha+\beta\sqrt{-1}$ i $x+\alpha-\beta\sqrt{-1}$, $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\cos\varphi$, zaś $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\sin\varphi$, oraz $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=g$, a $2g\cos\varphi=f$, zamienia te czynniki na $x+g(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ i $x+g(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)$ z których składa czynnik kwadratowy x^2+fx+g^2.

33

(α) $$x^6 - 3x^5 + \frac{75}{22}x^4 - \frac{20}{11}x^3 + \frac{5}{11}x^2 - \frac{1}{22}x + \frac{1}{924} = 0$$

Ponieważ się tu znajdują same przemiany znaków, więc pierwiastki tego równania, jeżeli wszystkie są rzeczywistemi, wszystkie są dodatne. Tu najlepiej zaraz zacząć przerobienia logarytmami a dla większej dokładności, uskuteczniejmy trzy pierwsze przerobienia siedmio cyfrowemi, a dalsze pięcio cyfrowemi logarytmami. Oprócz tego ponieważby się utrudziło uwagę z logarytmami ułamków, każdy przy mnożonym pamiętać jego wielokrotności z 10 potrzeba odjąć od cechy logarytmu, więc zmniejszyć mianowniki tak aby współczynnik pierwszego wyrazu pozostał 1, postarajmy się zarazem o taką liczbę przez którą mnożąc równe wielokrotności ~~wyrazy~~ współczynniki równania, ostatni wyraz stanie się $=1$, bo tym sposobem znacznie sobie robotę ułatwimy. Takim czynnikiem jest naturalnie $\sqrt[6]{924}$. Mnożąc wyrazy jak po sobie następują przez szereg $1, \sqrt[6]{924}, (\sqrt[6]{924})^2, (\sqrt[6]{924})^3 \ldots\ldots (\sqrt[6]{924})^6$, albo też raczej wprost logarytmy współczynników, co jest daleko wygodniej, potrzeba dodać do logarytmów tych współczynników: do współczynnika wyrazu drugiego $\log \sqrt[6]{924} = 0{\cdot}4942787$, do trzeciego $2 \log \sqrt[6]{924}$ i t. d. Tym sposobem otrzymamy równanie

$$x^6 - 0{\cdot}9714060x^5 + 1{\cdot}5211960x^4 - 1{\cdot}7424734x^3 + 1{\cdot}6346921x^2 - 1{\cdot}1289708x + 0{\cdot}0000002 = 0$$

Zrównanie którego pierwiastki są potęgi 2^1

$$x^6 + 1{\cdot}3273761x^5 + 2{\cdot}1871398x^4 + 2{\cdot}6443499x^3 + 2{\cdot}6417705x^2 + 1{\cdot}9771152x + 0{\cdot}0000004 = 0$$

Pierwiastki potęgi 2^2

$$x^6 + 2{\cdot}1579643x^5 + 3{\cdot}7642972x^4 + 4{\cdot}8031422x^3 + 5{\cdot}0364622x^2 + 3{\cdot}9097245x + 0{\cdot}0000008 = 0$$

Pierwiastki potęgi 2^3

$$x^6 + 3{\cdot}9568789x^5 + 7{\cdot}1960573x^4 + 9{\cdot}4411749x^3 + 10{\cdot}0332572x^2 + 7{\cdot}8180153x + 0{\cdot}0000016 = 0$$

Pierwiastki potęgi 2^4

$$x^6 + 7{\cdot}70397x^5 + 14{\cdot}29376x^4 + 18{\cdot}86260x^3 + 20{\cdot}06517x^2 + 15{\cdot}63602x + 0{\cdot}00000 = 0$$

Pierwiastki potęgi 2^5

$$x^6 + 15{\cdot}33542x^5 + 28{\cdot}57802x^4 + 37{\cdot}72482x^3 + 40{\cdot}13034x^2 + 31{\cdot}27204x + 0{\cdot}00000 = 0$$

Pierwiastki potęgi 2^6

$$x^6 + 30{\cdot}66372x^5 + 57{\cdot}15597x^4 + 75{\cdot}44964x^3 + 80{\cdot}26068x^2 + 62{\cdot}54408x + 0{\cdot}00000 = 0.$$

Pierwiastki potęgi 2^7

$$x^6 + 61{\cdot}32748x^5 + 114{\cdot}31194x^4 + 150{\cdot}89928x^3 + 160{\cdot}52136x^2 + 125{\cdot}08816x + 0{\cdot}00000 = 0$$

Z tego ostatniego równania otrzymamy:

$\log. a^{128} = 61{\cdot}32748$ $\log. c^{128} = 36{\cdot}58734$ $\log. e^{128} = 92{\cdot}56680 - 128{\cdot}0$

$\log. b^{128} = 52{\cdot}98446$ $\log. d^{128} = 9{\cdot}62208$ $\log. f^{128} = 2{\cdot}91184 - 128{\cdot}0$

Stąd $\log. a = 0{\cdot}47912$ $\log. c = 0{\cdot}28584$ $\log. e = 0{\cdot}72318 - 1 = 9{\cdot}72318$

$\log. b = 0{\cdot}41394$ $\log. d = 0{\cdot}07518$ $\log. f = 0{\cdot}02275 - 1 = 9{\cdot}02275$

Odejmując od każdego z tych logarytmów ~~[illegible]~~ logarytm czynnika któryśmy do współczynników pierwotnego równania dodawali, mianowicie logarytm 0·4·9428, otrzymamy nareszcie

$\log. x_1 = 9{\cdot}98484$ $\log. x_3 = 9{\cdot}79156$ $\log. x_5 = 9{\cdot}22890$

$\log. x_2 = 9{\cdot}91966$ $\log. x_4 = 9{\cdot}58090$ $\log. x_6 = 8{\cdot}52847$

Chcąc mało poprawki tych logarytmów za pomocą wzoru Newtona wyżej podanego, weźmy ~~[illegible]~~ $\log. x_4$ a znajdziemy $\log p = -\left(\log x_4 + \log. \frac{-0{\cdot}0000013}{-0{\cdot}0017548}\right) = 6{\cdot}4506158$ t.j. $p = 0{\cdot}00028224$ a $\log. x_4 = 9{\cdot}58058$. Dokładniejszą atoli poprawkę znajdziemy za pomocą reguły fałszywego założenia kładąc $x_4 = s_1 = 0{\cdot}380$ a potem $x_4 = s_2 = 0{\cdot}381$ skąd się znajdzie $B_1 = +0{\cdot}0000003182737$ $B_2 = -0{\cdot}000001426187$ a następnie $p = +0{\cdot}00030944$ a pierwiastek $x_4 = 0{\cdot}380690559$ który dopiero w siódmej cyfrze jest o 1 większy od prawdziwego.

Dla ćwiczenia się w rachunku podaję wszystkie jeszcze pierwiastki jak je Gauss znalazł

$x_1 = 0{\cdot}966234757101576\ldots$ $x_4 = 0{\cdot}380690406958041\ldots$

$x_2 = 0{\cdot}830604693233132\ldots$ $x_5 = 0{\cdot}169395306766867\ldots$

$x_3 = 0{\cdot}619309593041598\ldots$ $x_6 = 0{\cdot}033765242898424\ldots$

Nim atoli na samym początku zastrzegłem że podam tylko sposoby czysto algebraiczne rozwiązania równań liczbowych, zatém odsyłając chcących w całej obszerności poznać sposób Gräffego, do kilka już razy wspomnianego rocznika „Astronomisches Jahrbuch für 1841” zachęcam każdego niepomijać tego sposobu, bo nie będzie bez wielkiej korzyści przerobienie tego rachunku w całości.

§ 34. Jeszcze w r. 1819 angielski matematyk Horner podał w „Philosophical Transactions” sposób rozwiązania równań liczbowych ale, jak Leopold Strasznicki mówi, w stylu zbyt krótkim i bardzo trudny bez wielkiego mozołu do zrozumienia. Pomimo to oddaje mu Strasznicki wielkie zalety i nad innemi pierwszeństwo, co do prostoty swojéj, przyznaje. Otóż rzeczony Strasznicki podjął opracowanie tego sposobu i wydał na widok publiczny w r. 1842 pod tytułem „Neue Methode zur Auffindung der reellen Wurzeln höherer numerischer Gleichungen”. Z powodu wielu przysposobień poprzedzających ten sposób rozwiązania, niepodobno mi tu go przytaczać, szczególniej atoli praktyków odsyłam do co dopiero przywiedzionego dzieła. Sposób bowiem Hornera nie nabył dotąd rozgłosu z tego zapewne powodu, że w teoryi nie jest znakomitym, dlaczego też i ja pomijam go tą krótką wzmianką, zwłaszcza że mi jeszcze pozostają dwa szczególniej sposoby o których obszerniej mówić wypada; objaśnienia zaś Hornera dopełnił już Strasznicki w wyżej zacytowaném dziele.

Nim przystąpię do wspomnionych dwóch sposobów, nie mogę także milczeniem pominąć sposobu podanego przez G. A. Jahna w r. 1851 pod tytułem „Begründung eines neuen Verfahrens, sämmtliche Wurzeln einer höheren Gleichung ohne alle Vorkenntnisse der höheren Algebra auf rein mechanischem Wege schnell und sicher zu berechnen” „Leipzig 1851” ale tylko, jak sam tytuł mówi, we względzie praktycznym.

Uważa najprzód Jahn że każde równanie wyższego stopnia

$$0=a_0+a_1w+a_2w^2+a_3w^3+a_4w^4+a_5w^5+\dots$$

można przerobić na inne w którémby były same tylko przemiany znaków, kładąc tylko $w=-k+x$ gdzie k znowu uważane jest bezwzględnie i stosownie obraném być powinno. Uskuteczniwszy to podstawienie, otrzymamy równanie postaci

$$0=A_0-A_1x+A_2x^2-A_3x^3+A_4x^4-A_5x^5+\dots$$

Tak np. w równaniu $0=10+3w-2w^2+w^4$ położywszy $w=-2+x$, znajdziemy $0=12-21x+22x^2-8x^3+x^4$

Przerobione równanie, jeżeli jest $2n^{tego}$ stopnia, może tylko mieć n par do siebie należących pierwiastków postaci $x=y\pm\sqrt{z}$ gdzie y znowu jest dodatném zaś z dodatném lub odjemném według tego jak rzeczone pary pierwiastków są rzeczywiste lub urojone lub nareszcie obu tych rodzajów. Jeżeli zaś przerobione równanie jest $(2n+1)^{tego}$ stopnia, natenczas oprócz n par pierwiastków powyższej postaci, ma jeszcze jeden, ale tylko jeden rzeczywisty pierwiastek postaci $x=u$.

Powyższe przerobione równanie można także wystawić pod postacią

$$x^n+M_{n-1}x^{n-1}+M_{n-2}x^{n-2}+M_{n-3}x^{n-3}+\dots\dots+M_2x^2+M_1x+M_0=0$$

w którém współczynniki mają tak jak w pierwszém same przemiany znaków.

Potém, rozbiera Jahn równanie stopnia n^{tego} na dwa inne, jedno stopnia drugiego a drugie stopnia $(n-2)^{tego}$ z których przez mnożenie powstaje równanie stopnia n^{tego}. Tak np. ostatnie równanie rozbiera na

$$x^{n-2}+C_{n-3}x^{n-3}+C_{n-4}x^{n-4}+C_{n-5}x^{n-5}+\dots+C_2x^2+C_1x+C_0=0$$

i

$$x^2+B_1x+B_0=0$$

które rozmnożywszy (przez siebie) i porównawszy współczynniki wypadkowego ze współ-

czynnikami

ze współczynnikami mnożnemi tej samej potęgi w równaniu poprzedzającem, otrzymuje na wyznaczenie wprowadzonych współczynników $C_{n-3}, C_{n-4}, C_{n-5} \ldots C_2, C_1, C_0, B_1, B_0$ równania:

$$C_{n-3}+B_1=M_{n-1}, \quad C_{n-4}+C_{n-3}B_1+B_0=M_{n-2}, \quad C_{n-5}+C_{n-4}B_1+C_{n-3}B_0=M_{n-3} \text{ i t. d.}$$

Te współczynniki wyznaczywszy w liczbach, znajduje ze równania drugiego stopnia dwa pierwiastki a ze równaniem

$$x^{n-2}+C_{n-3}x^{n-3}+C_{n-4}x^{n-4}+\ldots\ldots+C_2x^2+C_1x+C_0=0$$

postępuje znowu tak jak z pierwszem, rozbierając je na

$$x^{n-4}+C'_{n-5}x^{n-5}+C'_{n-6}x^{n-6}+\ldots\ldots+C'_2x^2+C'_1x+C'_0=0$$

i

$$x^2+B'_1x+B'_0=0$$

Tym sposobem z każdem nowem równaniem postępując przychodzi się w końcu do dwóch równań drugiego stopnia, lub też do równania pierwszego i drugiego stopnia i wyznaczyć się wszystkie pierwiastki równania.

Ponieważ Jahn podał swój sposób jedynie dla praktyków nie potrzebujących znać dokładnie teoryi równań ale tylko umieć rachować wzory algebraiczne, dlatego podał tabelowe do rachunku wzory dla równań trzeciego, czwartego - - - piątego stopnia. Kto bawi znajdzie to wszystko w powołanem powyżej dziele, bo obszerność wywodu tych wzorów, nie mającego żadnej trudności, nie pozwala mi się dłużej nad tem zatrzymywać.

Przywodząc sposoby rozwiązania równań liczbowych podane przez cudzoziemców, nie należy zapomnieć o sposobie podanym przez rodaka naszego Ks. s. p. Hieronima Martynowskiego w „Memoires de la société des sciences de Liège" w r. 1844 i wydanym w osobnych odbitkach. Właściwie mówiąc nie podał Martynowski nowego sposobu bo pozostał przy sposobie Newtona ale wprzód dowiódł że tym sposób uczynić można w każdym przypadku zastosować się dającym oraz zapewnić się o granicy zbliżania się do prawdziwego pierwiastka. W tej swojej pracy, którą wydał naturalnie w francuzkim języku, pod tytułem „Sur la résolution des équations numériques, par J. Martynowski répétiteur de mathématiques à l'école des arts-et-manufactures et des mines de l'Université de Liège", (zamieszcza wiele pięknych i nowych twierdzeń). Tak np. (zupełnie elementarny) wywód szeregu Taylora, którego dotąd nigdzie nie napotkałem, jako też elementarny dowód reszty tego szeregu czyli dopełniającego jego wyrazu i inne.

Ponieważ używa w swojém piśmie więcej rachunku wyższego i trygonometryi przeto z powodów na początku wyrażonych pomijając w tej wzmiance polecając gorąco naszej młodzieży nie pomijać tej pracy, bo tylko tym sposobem pamięć jego, (który zawcześnie umarł godzien) w kraju pozostanie.

Po tej wzmiance przystępuję nareszcie do ostatnich dwóch sposobów o których mówić zamierzyłem. Pierwszym jest

Sposób Rutherforda

§35. W roku 1849 podał angielski matematyk Rutherford sposób rozwiązania równań liczbowych zupełnie odmienny od dotąd znanych który szczególniej w wyższych stopniach jest bardzo wygodnym. Sposób ten przetłomaczył z angielskiego na niemiecki język Wiegand.

Jest on następujący: Mając do rozwiązania równanie

$$f(x)=x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+dx^{n-4}+\ldots\ldots+sx+t=0 \quad \text{- - - -} (1)$$

i położywszy w niem $x=z+\alpha$, otrzymamy nowe równanie

$$f(z)=z^n+Az^{n-1}+Bz^{n-2}+Cz^{n-3}+Dz^{n-4}+\ldots\ldots+Sx+T=0 \quad \text{- - - -} (2)$$

w którem, jak wiadomo,

$$A=n\alpha+a, \qquad B=\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2+(n-1)a\alpha+b$$

$$C=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha^3+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a\alpha^2+(n-2)b\alpha+c$$

(3) - - -

$$D=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\alpha^4+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}a\alpha^3+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}b\alpha^2+(n-3)c\alpha+d$$

- - - - - - - - - -

$$S = n\alpha^{n-1} + (n-1)a\alpha^{n-2} + (n-2)b\alpha^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + 2r\alpha + s$$
$$T = \alpha^n + a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2} + c\alpha^{n-3} + d\alpha^{n-4} + \ldots\ldots + s\alpha + t$$

i którego pierwiastki, według §7 i następnych, są o α mniejsze niż pierwiastki równania (1).

Oznaczywszy pierwiastki równania (1) przez $\alpha+\sqrt{-\beta}$, ~~x~~ $\alpha-\sqrt{-\beta}$, $r_1, r_2, r_3, r_4 \ldots$ tedy iloczyn z czynników pierwiastkowych, pochodzących z pierwiastków postaci urojonej, (: lubo mogą być takie rzeczywistemi gdy β jest odjemnem:) mianowicie z czynników $x-\alpha-\sqrt{-\beta}$ i $x-\alpha+\sqrt{-\beta}$ będzie $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta$, iloczyn zaś z pierwiastkowych czynników $x-r_1$, $x-r_2$, $x-r_3 \ldots$ będzie naturalnie postaci $x^{n-2}+a'x^{n-3}+b'x^{n-4}+c'x^{n-5}+d'x^{n-6}+\ldots\ldots$ ---(A)

Mnożąc te dwa iloczyny przez siebie, otrzymuje się widocznie równanie (1) lubo pod inną postacią. Równając potem współczynniki mnożące też same potęgi ilości x w obu równaniach, znajdziemy

$$a = a' - 2\alpha$$
$$b = b' - 2a'\alpha + (\alpha^2+\beta)$$
$$c = c' - 2b'\alpha + a'(\alpha^2+\beta)$$
$$d = d' - 2c'\alpha + b'(\alpha^2+\beta)$$
$$e = e' - 2d'\alpha + c'(\alpha^2+\beta)$$
$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$
$$r = r' - 2q'\alpha + p'(\alpha^2+\beta)$$
$$s = \cancel{x'} - 2r'\alpha + q'(\alpha^2+\beta)$$
$$t = \qquad\qquad + r'(\alpha^2+\beta)$$

Te wartości na $a, b, c, \ldots\ldots s, t$, położywszy w (3), otrzymamy:

$$(4)\begin{cases} A=f_1\alpha, \quad B=f_2\alpha+\beta, \quad C=f_3\alpha+A\beta, \quad D=f_4\alpha+B\beta-\beta^2, \quad E=f_5\alpha+C\beta-A\beta^2 \\ F=f_6\alpha+D\beta-B\beta^2+\beta^2, \quad G=f_7\alpha+E\beta-C\beta^2+A\beta^2, \quad \text{i t. d.}\end{cases}$$

gdzie

$$f_1\alpha = (n-2)\alpha + a'$$
$$f_2\alpha = \frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2}\alpha^2 + (n-3)a'\alpha + b'$$
$$f_3\alpha = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3}\alpha^3 + \frac{(n-3)(n-4)}{1.\ 2}a'\alpha^2 + (n-4)b'\alpha + c'$$
$$f_4\alpha = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\alpha^4 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3}a'\alpha^3 + \frac{(n-4)(n-5)}{1.\ 2}b'\alpha^2 + (n-5)c'\alpha + d'$$
$$f_5\alpha = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\alpha^5 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a'\alpha^4 + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ 3}b'\alpha^3$$
$$+ \frac{(n-5)(n-6)}{1.\ 2}c'\alpha^2 + (n-6)d'\alpha + e'$$

i t. d.

A.j. otrzymany związek współczynników $A, B, C, D, \ldots\ldots$ równania którego pierwiastki są mniejsze o α t.j. o rzeczywistą część pierwiastka postaci urojonej, od pierwiastków równania (1), ze współczynnikami $a', b', c', d' \ldots\ldots$ Ten związek a raczej te zależność jednych współczynników od drugich jest uwagi godną, albowiem z niej znajdziemy potrzebne wzory do znalezienia pierwiastków urojonych.

Te ogólne wzory zastosujmy do szczególnych stopni.

I <u>Zrównania stopnia 3go</u>

Niech danem będzie do rozwiązania równanie $x^3+ax^2+bx+c=0 \ldots\ldots (1)$ Pierwiastki jego oznaczmy przez r, $\alpha+\sqrt{-\beta}$, $\alpha-\sqrt{-\beta}$ z których, według §13 r jest koniecznie rzeczywistym, dwa zaś inne będą rzeczywistemi lub urojonemi według tego jak β wypadnie odjemnem lub dodatnem. Położywszy w (4) $n=3$, ponieważ w równaniu (A) oprócz a' wszystkie inne współczynniki będą $=0$, otrzymamy ~~$f_1\alpha = \alpha+a'$~~, $f_2\alpha=0$, $f_3\alpha=0$, $f_4\alpha=0$ i t.d., a dlatego $B=\beta$, $C=A\beta$, $D=0$, $E=0$ i t.d. przeto $C=AB$ czyli $AB-C=0$

Ale tedy w (3) $n=0$, otrzymujemy

$$A = \cancel{3\alpha^2+2a\alpha+b}\ 3\alpha+a$$
$$B = 3\alpha^2+2a\alpha+b$$
$$C = \alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c$$

Te wartości położywszy w zrównaniu $AB-C=0$, otrzymamy

$$\alpha^3+a\alpha^2+\frac{a^2+b}{4}\alpha+\frac{ab-c}{8}=0 \text{ - - - - - (2)}$$

z którego znajdzie się α t. j. część rzetelną obu pierwiastków pospolicie urojonej zrównania danego. Położywszy zaś też same wartości w zrównaniach $B=\beta$ i $C=A\beta$, przyjdziemy do zrównań

$$3\alpha^2+2a\alpha+b=\beta \text{ - - - - - - - - (p)}$$

i

$$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=\beta(3\alpha+a) \text{ - - - - (q)}$$

Dwa te zrównania otrzymalibyśmy też kładąc w $\chi(1)$ $x=\alpha+\sqrt{-\beta}$ lub $x=\alpha-\sqrt{-\beta}$ i oddzielając część rzetelną od urojonej oraz kładąc każdą $=0$.

Jeżeli chcemy naprzód znaleźć α, potrzeba ze zrównań (p) i (q) wyrugować β, jeżeli zaś przeciwnie chcemy mieć wprzód wartość β, wyrugować potrzeba z tychże zrównań α. Wyżej wyrugowaliśmy już β i znaleźli zrównanie (2), rugując zaś α, znajdziemy

$$\beta^3+\frac{a^2-3b}{2}\beta^2+\frac{(a^2-3b)^2}{16}\beta+\frac{4(a^2-3b)(b^2-3ac)-(9c-ab)^2}{192}=0 \text{ - - - - (r)}$$

Ostatnie to rugowanie nie jest jak widzimy tak łatwem jak rugowanie β, dlatego też unikać go potrzeba.

Znalazłszy wartość α ze zrównania (2), znajdzie się β bardzo łatwo ze zrównania (p) lub (q). Na znalezienie β otrzyma się jeszcze prostszy wzór, odejmując zrównanie (2) od (q); otrzymamy bowiem

$$\frac{9c-ab}{8}-\frac{a^2-3b}{4}=\beta(3\alpha+a) \text{ - - - - - - - - - (3)}$$

Jeżeli dane zrównanie jest zupełnem jak (1), bardzo często jest korzystnem wyrzucić z niego wyraz drugi, przez co będzie $a=0$ a wzory (2), (p) i (3), przyjdą na następujące:

$$\alpha^3+\frac{b}{4}\alpha-\frac{c}{8}=0 \text{ - - - - - (2')}$$

$$\beta=3\alpha^2+b \text{ - - - - - - (p')}$$

$$\beta=\frac{b}{4}+\frac{3c}{8\alpha} \text{ - - - - - - - (3')}$$

Zrównanie $x^3+bx+c=0$ porównawszy ze zrównaniem (2'), dostrzeżemy że pierwiastki tego ostatniego są podwojonemi pierwszego, oraz ze znakami przeciwnemi; zatem jeżeli pierwiastkami ostatniego są $+r_1$, $+r_2$, $+r_3$, pierwiastkami zrównania (2') będą $-\frac{r_1}{2}$, $-\frac{r_2}{2}$, $-\frac{r_3}{2}$ t. j. wartości α są połowami x czyli rzeczy r z przeciwnym znakiem. Zastosujmy już nareszcie powyższe wzory do rozwiązania szczególnych zrównań trzeciego stopnia.

Za pierwszy przykład weźmy zrównanie $x^3-7x+7=0$ i szukajmy jego pierwiastków. Ponieważ ostatni wyraz tego zrównania jest dodatnym, więc rzetelny pierwiastek który przez r oznaczyliśmy będzie odjemnym. Aby nie mieć do czynienia z odjemnym pierwiastkiem, przemienimy znaki wyrazów na miejscach parzystych na przeciwne a otrzymamy zrównanie $x^3-7x-7=0$ którego pierwiastki są z przeciwnemi znakami pierwiastków pierwszego, przez co i rzetelny pierwiastek tego ostatniego zrównania będzie $+r$ zaś $\alpha=-\frac{r}{2}$. Znalazłszy przeto r, mamy zaraz i α a β znajdzie się z (3'). Wyszukanie r uskutecznimy podług sposobu wyłożonego szczególniej w końcu §9. Ponieważ dla $x=3$ wypada $f(3)=-1$ a dla $x=4$, $f(4)=+29$, zatem między 3 i 4 leży pierwiastek, będzie więc całkowita jego część 3. Zmniejszymy więc naprzód pierwiastki o 3 według powołanego §fu jak następuje:

1	0	−7	−7
	+3	+9	+6
	+3	+2	−1
	+3	+18	+0·814464
	+6	+20	−0·185536
	+3	+0·3616	+0·166382592
	+9	+20·3616	−0·019153408
	+0·04	3632	18791228
	+9·04	+20·7248	−0·000362180
	+0·04	+0·73024	208875
	+9·08	+20·797824	− 153305
	+0·04	73088	146213
	+9·12	+20·87091|2	7092
	+0·008	823|0	6266
	+9·128	20·87914|2	826
	+0·008	823|0	626
	+9·136	20·88737	200
	+0·008	9 6	187
	9·14|4	20·8874|6	13
		20·887|6	

$r=3·048917339$

Jest przeto $r = 3{\cdot}048917339$ a następnie $\alpha = -\frac{r}{2} = -1{\cdot}524458669\ldots$

Z równania (3') jest $\beta = -\frac{7}{4} - \frac{21}{8\alpha} = -1{\cdot}75 + 1{\cdot}721922708 = -0{\cdot}028077292$

Ponieważ β wypadło odjemne, więc dwa drugie pierwiastki są także rzeczywistemi. Te pierwiastki są

$$3{\cdot}048917339$$

$$-1{\cdot}524458669 \pm \sqrt{0{\cdot}028077292} = -1{\cdot}524458669 \pm 0{\cdot}167562810$$

Więc nareszcie pierwiastkami ~~założonego~~ równania drugiego są:

$x_1 = 1{\cdot}356895859\ldots$ zaś założonego $x_1 = -1{\cdot}356895859\ldots$

$x_2 = 1{\cdot}692021479\ldots$ $\qquad x_2 = -1{\cdot}692021479\ldots$

$x_3 = -3{\cdot}048917339\ldots$ $\qquad x_3 = 3{\cdot}048917339\ldots$

Może nie od rzeczy będzie opisać w krótkości sposób postępowania, przy którym później tym gdzie się zaczyna skrócenie. Otóż zwyczajnym, wyżej pokazanym i tu opisanym sposobem postępuje się dopóty, aż otrzyma się tyle cyfr dziesiętnych, ile ich w pierwiastku zamierzamy otrzymać. Tak w naszym przykładzie gdzie pierwiastek znaleźliśmy w dziewięciu cyfrach dziesiętnych, rzeczonym sposobem otrzymuje się tylko 3·048 a resztę t.j. dwa razy tyle cyfr ile się ich zawierającym sposobem otrzymało, rachuje się już skróconym sposobem aby nie gromadzić w reszcie masy cyfr w całe nam na nic nie przydatnych. Jeśli kto zapyta jak się otrzymuje ~~cyfry~~ dziesiętne cyfry pierwiastka, odpowiem im zwracając tylko ich uwagę na to, że ponieważ ten sposób szukania cyfr pierwiastka założony na tworzeniu ~~coraz no~~ współczynników coraz nowych równań, których by pierwiastki były mniejsze o następne cyfry pierwiastka, i ponieważ w tem postępowaniu zmniejszany coraz bardziej ostatni wyraz równania, aż prawie do zera, to zaś zmniejszanie pochodzi z dodania iloczynu z liczby drugiej kolumny, otrzymanego przez cyfrę o którą pierwiastki zmniejszamy, wypadającej przez cyfrę pierwiastka, dosyć jest, więc odwrotnie niewiadomej tej cyfry pierwiastka, podzielić resztę ostatnią przez liczbę w drugiej stojącą kolumnie, a wypadnie na iloraz albo prawdziwa, albo też o 1 większa lub mniejsza cyfra. Przed napisaniem tej cyfry na pierwiastek najlepiej jest zrobić próbę przybliżoną, czyli nie jest za wielką lub za małą. Należy pamiętać aby się przekonać czyli nie jest za wielka lub za mała. W naszym przykładzie, zmniejszywszy pierwiastki założonego równania o 3, otrzymaliśmy współczynniki przerobionego równania

$$1 \quad +9 \quad +20 \quad -1$$

Chcąc teraz znaleźć dziesiętną pierwszą cyfrę po kropce, mówimy 20 w 1 t.j. $1:20 = 0{\cdot}04$ przeto z cyfrą 4 postępujemy tak jak postąpiliśmy z całkowitą cyfrą 3 i otrzymamy współczynniki nowego przerobionego równania, którego pierwiastki są mniejsze o 3·04 od pierwiastków równania $x^3 - 7x - 7 = 0$,

$$1, \quad +9{\cdot}12 \quad +20{\cdot}7248 \quad -0{\cdot}185536.$$

Dla znalezienia następnej cyfry pierwiastka, mówimy znowu 20·7… albo lepiej 20 w ~~158~~ 185 mieści się 8 razy, i to na trzeciem miejscu, bo 185 są tysiączne części. Z cyfrą 8 przeprowadziwszy cały rachunek, znajdziemy współczynniki nowego równania

$$1 \quad +9{\cdot}136 \quad +20{\cdot}870912 \quad -0{\cdot}019153408$$

Tak otrzymawszy trzy cyfry (: gdybyśmy chcieli mieć pierwiastek w pięciu cyfrach, dosyćby było otrzymać tem postępowaniem dwie tylko cyfry t.j. 3·04 :) zaczynamy działać skróconym sposobem nie gromadząc w ostatniej kolumnie ~~d~~ czyli w reszcie więcej cyfr nad dziewięć. Tak tedy mówimy: 20·8 albo raczej 21 w 191, mieści się 9 razy, a ta cyfra będzie naturalnie na miejscu czwartem bo 191 są dziesięcio~~tysiączne~~ tysiączne. Ponieważ w ostatniej kolumnie potrzebujemy tylko dziewięć cyfr dziesiętnych, więc w drugiej, która się będzie mnożyć przez czwartą cyfrę 9, potrzebować będziemy tylko pięciu cyfr a reszta pójdzie na poprawkę.

Kiedy w tej tu drugiej kolumnie potrzebujemy najwięcej sześć cyfer, rachując do tego i cyfrę poprawkową, tedy w pierwszej kolumnie potrzebować tylko będziemy dwóch a trzecia odcina się na poprawkę i dlatego to w tej kolumnie nie widzimy nowej cyfry 9 bo nam ta już jest nie potrzebną. Przeprowadziwszy rachunek z tą cyfrą, otrzymamy resztę −0·000362180. Aby otrzymać współczynniki nowego zrównania, potrzeba jeszcze do drugiej kolumny drugi raz dodać to co z pierwszej wypada t.j. 0·008230, a tym sposobem rzeczone współczynniki będą:

1 +9·144 +20·88737 −0·000362180

Dla dalszej cyfry pierwiastku mówimy znowu: 21 w 36 mieści się ~~raz~~ 1, t.j. to na miejscu piątém. Ponieważ to jest piąta cyfra dziesiętna, więc w kolumnie drugiej potrzebować będziemy tylko czterech cyfry a piąta pójdzie na poprawkę. Kiedy tu najwięcej potrzebujemy pięć, to to w pierwszej kolumnie potrzebujemy tylko jedności całkowitych a dziesiętna cyfra idzie na poprawkę. Tym sposobem otrzymamy do drugiej kolumny tylko 9 na piątém miejscu. Odbywszy cały rachunek, pozostaje reszta w ostatniej kolumnie −0·000153305. Do drugiej kolumny nie należy zapomnieć dodać drugi raz wypadek z pierwszej t.j. 9 na piątém miejscu, aby otrzymać współczynniki nowego zrównania. Następnie mówimy: 21 w 153 mieści się 7 razy. Będzie to więc następna szósta cyfra pierwiastku którego w kolumnie drugiej potrzebować będziemy tylko trzech cyfer a czwarta pójdzie na poprawkę. A kiedy w tej tu kolumnie potrzebujemy najwięcej czterech cyfer, w pierwszej więc, gdzie tylko jest jedna cyfra całkowita, nie potrzebować nie będziemy i dlatego tu zamienia się dalsze szukanie następnych cyfer pierwiastku na skrócone dzielenie reszty przez liczbę kolumny drugiej.

Pomimo zapowiedzianej krótkości, opisałem całe postępowanie dość obszernie dlatego, abym w innych przykładach nie był przymuszony zwracać uwagę przerabiającego ~~[illegible]~~, że każdym krokiem.

Szukajmy teraz pierwiastków zrównania $x^3-19x^2-23x+520=0$ a to w 12 stu cyfrach dziesiętnych. Pomijając już szczegółowe tłómaczenie postępowania, powiem tylko że tu wyrzucimy tymże samym rachunkiem wyraz drugi, zmniejszając pierwiastki tego zrównania o $\frac{19}{3} = 6\cdot\dot{3}$, zwracając tylko tę jedyną uwagę, że jak zapewne wiadomo, dla krótkości w pisaniu $6\cdot\dot{3}$ znaczy $6\cdot333\ldots$ ~~na~~ $2\cdot\dot{7}\dot{3} = 2\cdot737373\ldots$ że $0\cdot\dot{7}4\dot{0} = 0\cdot740740740\ldots$ t.j. że się kładzie kropki nad ~~na~~ pierwszą i ostatnią cyfrą peryjodu dla nie zapomnienia w dzieleniach o następujących cyfrach. Po otrzymaniu współczynników przerobionego zrównania którego pierwiastki są mniejsze o $6\cdot\dot{3}$ od pierwiastków założonego, łatwo dostrzedz że jego pierwiastek leży między 12 i 13, zatem przystępuję do całkowitego działania

1	−19	−23	+520	pierwiastek
	+6·3̇	−80·2̇	−653·74̇0̇	12·413973437224
	−12·6̇	−103·2̇	−133·74̇0̇	
	+6·3̇	−40·1̇	+8	
	−6·3̇	−143·3̇	−125·740740740740	
	+6·3̇	+144·6̇	+121·290666666667	
	+12	+0·6̇	−4·450074074073	
	24	+288	+3·183187666667	
	36	+288·666	−1·266886407406	
	36·4	14·56	+0·956407997000	
	36·8	303·22	−0·310478410406	
	37·2	14·72666	+287053100618	
	37·21	317·94666	−234253097888	
	37·22	3721	+223288809925	
	37·23	318·31876	10964288863	
	37·233	3722	9569601[illegible]5	
	37·236	318·690966	1394686668	
	37·239	111699	1275947743	
	37·2399	318·802665	118739256	
	37·2408	111708	95696066	
	37·2417	318·914373666	23043190	
	37·24177	33515916	22329608	
	37·2418	318·947889576	713411	
		3351672	637927	
		318·981406290	75614	
		2606922	63856	
		318·98401321	12346	
		260693	12776	
		F 318·9866201	+42	

F 318·9866201
1117
318·9867318
1117
318·986843
65
318·98686
1
318·98687

Znaleziony tu pierwiastek $r = 12{\cdot}413973437224$ z którego wypada $\alpha = -\frac{r}{2} = -6{\cdot}206986718612$, jest pierwiastkiem zrównania bez drugiego wyrazu, t. j. zrównania $x^3 - 143{\cdot}3x - 133{\cdot}740 = 0$, a zatem tak ten pierwiastek jako też i α mniejszemi są o $\frac{19}{3}$ od tych jakie należą do założonego zrównania: dla tego więc ostatniego będą

$$\begin{array}{rl} & 12{\cdot}413973437224 \\ \frac{19}{3} = & 6{\cdot}333333333333 \\ \hline r = & 18{\cdot}747306770557 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & -6{\cdot}206986718612 \\ & +6{\cdot}333333333333 \\ \hline \alpha = & +0{\cdot}126346614721 \end{array}$$

Rachując teraz wartość β, ponieważ $b = -143{\cdot}3$ a $c = -133{\cdot}740$, zatem

$$\begin{array}{rl} \frac{b}{4} = & -35{\cdot}833333333333 \\ \frac{3c}{8\alpha} = & +8{\cdot}080052375075 \\ \hline \beta = & -27{\cdot}753280958258 \end{array}$$

Ponieważ β wypadło odjemne, zatem trzy pierwiastki założonego zrównania są rzeczywiste, a mianowicie:

$$x_1 = 18{\cdot}747306770557\ldots$$
$$x_2 = 0{\cdot}126346614721 + \sqrt{27{\cdot}753280958258} = 5{\cdot}394427950298\ldots$$
$$x_3 = 0{\cdot}126346614721 - \sqrt{27{\cdot}753280958258} = -5{\cdot}141734720856\ldots$$

Gdyby wypadło $\beta = 0$, wnieślibyśmy że dwa pierwiastki zrównania są między sobą równe.

II. Zrównania czwartego stopnia.

Położywszy w ogólnem zrównaniu (A) $n = 4$, będzie $c' = 0$, $d' = 0$, $e' = 0$ i t. d. a następnie $f_3\alpha = 0$, $f_4\alpha = 0$, $f_5\alpha = 0$ i t. d. przeto z wzorów (4) na początku Rutherforda sposobu przytoczonych wypada

$$A\beta - C = 0$$
$$\beta^2 - B\beta + D = 0$$

Rugując z tych dwóch zrównań β, otrzymamy

$$ABC - A^2D - C^2 = 0$$

F Niechże teraz będzie dane do rozwiązania zrównanie bez drugiego wyrazu $x^4 + bx^2 + cx + d = 0$.

Położywszy też we wzorach (3) także wyprowadzonych $n = 4$, otrzymamy:

$$A = 4\alpha$$
$$B = 6\alpha^2 + b$$
$$C = 4\alpha^3 + 2b\alpha + c$$
$$D = \alpha^4 + b\alpha^2 + c\alpha + d$$

które wartości położywszy w ostatniem zrównaniu, znajdziemy

$$\alpha^6 + \frac{b}{2}\alpha^4 + \frac{b^2 - 4d}{16}\alpha^2 - \frac{c^2}{64} = 0$$

Ponieważ w tem zrównaniu ostatni wyraz jest odjemnym przeto jeden z pierwiastków α^2 jest rzeczywistym i dodatnym, a zatem α mieć będzie dwie wartości równe ze znakami przeciwnemi. Dwie te wartości dadzą nam też także dwie wartości na β które z powyższego zrównania $A\beta - C = 0$ t. j. ze zrównania $\beta = \frac{C}{A} = \frac{4\alpha^3 + 2b\alpha + c}{4\alpha} = \alpha^2 + \frac{b}{2} + \frac{c}{4\alpha}$ łatwo obrachowane być mogą. Skoro więc znajdziemy α^2 z powyższego zrównania szóstego stopnia, które się na wzór zrównań trzeciego stopnia rozwiązuje, otrzymamy też i β, bo tylko wypadnie jeszcze podzielić $\frac{1}{4}c$ przez α, które z α^2 łatwo znajdziemy.

Gdyby dane do rozwiązania zrównanie było zupełne, t. j.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

zrównanie szóstego stopnia na α wypadłoby

$$\alpha^6 + \frac{3a}{2}\alpha^5 + \frac{3a^2 + 2ab}{4}\alpha^4 + \frac{a(a^2 + 4b)}{8}\alpha^3 + \frac{a(2ab + c) + b^2 - 4d}{16}\alpha^2 + \frac{a(ac + b^2 - 4d)}{32}\alpha + \frac{abc - a^3d - c^2}{64} = 0$$

widzimy więc jak tu jest korzystnem pozbyć się drugiego wyrazu ze zrównania zupełnego. Bez względu nawet na ogólne wzory łatwo otrzymać można powyższe zrównanie szóstego stopnia, ~~które~~ oznaczając tylko cztery pierwiastki zrównania $x^4 + bx^2 + cx + d = 0$ przez $y \pm \sqrt{z_1}$ i $-y \pm \sqrt{z_2}$ i składając z nich zrównanie czwartego stopnia, oraz porównywając

porównywając współczynniki otrzymanego z danem zrównaniem. Otrzymamy bowiem

$$2y^2+z_1+z_2=-b$$
$$2y(z_1-z_2)=-c$$
$$y^4-y^2(z_1+z_2)+z_1z_2=d$$

z których zrównań rugując z_1 i z_2, przyjdziemy do zrównania

$$y^6+\frac{b}{2}y^4+\frac{b^2-4d}{16}y^2-\frac{c^2}{64}=0$$

które jest tem samem jak poprzednio na α otrzymane.

Znalazłszy z tego zrównania wartość y^2 a następnie i y, znajdziemy też z_1 i z_2 z dwóch pierwszych powyższych zrównań.

Objaśniając to postępowanie przykładem, szukajmy pierwiastków zrównania

$$x^4-2x^3+5x^2+4x-17=0$$

Wyrzucając najpierw wyraz drugi, zmniejszyć musimy pierwiastki tego zrównania o ~~+~~ $\frac{2}{4}$ = 0'5, przeto

1	−2	+5	+4	−17
	+0'5	−0'75	+2'125	+3'0625
	−1'5	+4'25	+6'125	−13'9375
	+0'5	−0'5	+1'875	
	−1'0	+3'75	+8	
	+0'5	−0'25		
	−0'5	+3'5		
	+0'5			
	0			

Zrównanie przeto bez drugiego wyrazu będzie $x^4+3'5x^2+8x-13'9375=0$, zatem w powyższych wzorach jest $b=3'5$, $c=8$, $d=-13'9375$ a następnie zrównanie szóstego stopnia na α będzie $\alpha^6+1'75\alpha^4+4'25\alpha^2-1=0$ które na wzór zrównania trzeciego stopnia rozwiązując, mianowicie szukając α^2, mamy:

1

+1'75
1'95
2'15
2'35
~~2'351~~ 2'36
~~2'352~~ 2'37
~~2'353~~ 2'38
~~2'3534~~ 2'384
~~2'3538~~ 2'388
~~2'3542~~ 2'392

+4'25
+ 39
4'64
43
5'07 ... 5'07
2351 | 236
5'09351 | 5'0936
2352 | 237
5'11703 | 5'1173
94136 | 9536
5'126 4436 | 5'126836
94152 | 9552
5'1358588 | 5'136388
2354 | 239
5'1366942 | 5'136627
2354 | 239
5'136330 | 5'13687
2
5'13635
2
5'1364

−1
+0'928
−0'072
509361
210640
F 20505774 ~~4~~
5591236
5136094
455162
410908
44254
41091
3163
3082
81
51
30
31
+1

α^2 = 0'2141088 ~~616~~ (370)
przeto
α = ±0'46271 8 ~~9879~~ (391)
+0'5
α = +0'96271 8 ~~9879~~ 391
α = −0'0372816 ~~121~~ 09

F 20507344
556656
513663
42993
41094
1899
1541
358
359
+1

Szukając wartość β mamy:

	dla $+\alpha$		dla $-\alpha$
α^2 =	0'2141088 ~~616~~ (370)	----	0'2141088 ~~616~~ (370)
$\frac{b}{2}$ =	+1'75		+1'75
$\frac{c}{4\alpha}$ =	+4'32222 ~~777807~~ (83351)	---	−4'32222 ~~777807~~ (83351)
β =	+6'28638 ~~66423~~ (91721)	---	−2'3581 ~~689191~~ (74981)

Dwa przeto pierwiastki założonego zrównania są rzetelne a dwa urojone, mianowicie:

x_1 = 0'962718 ~~9879~~ (391) $+\sqrt{-6'28638\,\text{~~66423~~}}$ (91721)
x_2 = 0'962718 ~~9879~~ (391) $-\sqrt{-6'28638\,\text{~~66423~~}}$ 91721
x_3 = 0'0372816 ~~021~~ (9) $+\sqrt{2'3581\,\text{~~689191~~}}$ (74981) = +1'57291 ~~40051~~ (6651) ...
x_4 = 0'0372816 ~~021~~ (9) $-\sqrt{2'3581\,\text{~~689191~~}}$ (74981) = −1'498351 ~~9809~~ (3433) ...

Ten jeden przykład rozwiązania zrównań liczbowych zapomocą sposobu podanego przez Rutherforda już nam dowodzi o ile więcej potrzeba zachodu w tym niż w poprzedzającym stopniu. Pozwala też wnioskować niewątpliwie, że ~~w~~ ~~piątym~~ w piątym i ~~dalszych~~ wyższych stopniach mozół i nawet robota coraz bardziej rośnie. Już bowiem w piątym stopniu wypada potrzeba znalezienia rzetelnej części pierwiastków postaci urojonej t. j. części α, rozwiązania zrównania 10tego stopnia, co lubo nietrudne, zawsze jest mozolne i nadzwyczajnej wymaga przytomności aby się błędu ustrzedz; dlatego odsyłając ciekawych do samego

drutą
Rutherforda lub też do jego tłomaczenia, jak wspomniałem, przez Wieganda przystąpię na czwartym stopniu. Robię jednak tę uwagę, że do znalezienia pierwiastków trzeciego stopnia nader jest wygodnym, jak również, chociaż więcej wykonać potrzeba roboty, co jest nieuniknioném, bo sama natura zadania tego wymaga, w piątym i wyższych stopniach, ograniczając się tylko do szukania jednego z pierwiastków, jest dość wygodnym. Na dowód niech posłuży obrachowanie rzetelnego pierwiastka równania $x^5+4x^4-3x^3+10x^2-2x-962=0$. Ten pierwiastek leży między 3 i 4 o czém się bardzo łatwo przekonać, bo się znajdzie granicę wyższą pierwiastków dodatnych 4 i znajdziemy $f(4)=+1046$ a $f(3)=-392$. Rachunek więc tego pierwiastka jest następujący:

1	+ 4	− 3	+ 10	− 2	− 962 3·3857762070
	+ 3	+21	+ 54	+192	+570
	+7	+18	+ 64	+190	−392
	10	30	144	624	+290·21133
	13	48	208	814	−101·78867
	16	39	261	153·3711	+ 94·6440893568
	19	87	469	967·3711	−7·1445806432
	19·3	48	42·237	166·5714	+61·8200108066
	19·6	135	511·237	1133·9425	−0962579562 6
	19·9	5·79	44·001	49·10861696	+8680404588
	20·2	140·79	555·238	1183·05111696	−945391038
	20·5	5·88	45·792	50·14541184	+868386840
	20·58	146·67	601·030	1233·196528 80	−77004198
	20·66	5·97	12·827712	3·20368732	+74435857
	20·74	152·64	613·857712	1236·40021612	−2568341
	20·82	6·06	12·959936	3·20782564	+2481285
	20·90	158·70	626·817648	1239·6080418	− 87056
	20·905	1·6464	13·092672	4497565	~~521~~
	20·910	160·3464	639·910320	1240·0577983	+ 86842
	20·915	1·6528	827143	4498378	− ~~414~~
	20·920	161·9992	640·7374603	1240·5076361	− 214
	20·925	1·6592	827666	44992	
		163·6584	641·5651209	1240·552628	
		1·6656	828189	44992	
		165·3240	642·39332	1240·597620	
		1045	1166	~~4494~~	
		165·42856	642·5093	~~1240·6420~~	
		1046	1161	381	
		165·5331	642·6254	1240·601	
		1046	1161		
		165·6377	642·742		
		1046			
		165·7423			
		~~1046~~			
		165·8469			

8
1

Dodatny przeto rzetelny pierwiastek założonego równania jest 3·3857762070... Skrócenia w tym rachunku robią się tak jak przy stopniu trzecim wytłomaczono, mianowicie: każda kolumna rachuje się dopóty, dopóki tylko jakikolwiek ma wpływ na potrzebne cyfry następującej kolumny, a rachunek ten odbywa się zupełnie tak jak w trzecim stopniu wytłomaczonym sposobem. Zresztą, przerobienie choćby dwóch przykładów, dokładnie każdego obeznać z całém postępowaniem.

§36. W końcu tego wykładu, nie mogę milczeniem pominąć sposobu podanego przez tegoż Rutherforda na rozwiązanie równań trzeciego stopnia, za pomocą którego znajdują się za jednym rachunkiem wszystkie trzy pierwiastki, bądź one są rzetelnemi bądź też dwa z nich urojonemi. F w r. 1849
Oznaczywszy trzy pierwiastki równania trzeciego stopnia jak poprzednio przez r, $\alpha+\sqrt{\beta}$ i $\alpha-\sqrt{\beta}$ oraz złożywszy z nich równanie samo, otrzymamy takowe

$$x^3-(2\alpha+r)x^2+(\alpha^2+2r\alpha-\beta)x-r(\alpha^2-\beta)=0$$

Zmniejszając pierwiastki tego równania o r odbyć musimy według §9 następujące działania:

1	$-(2\alpha+r)$	$+(\alpha^2+2r\alpha-\beta)$	$-r(\alpha^2-\beta)$
	$+r$	$-2r\alpha$	$+r(\alpha^2-\beta)$
	-2α	$+(\alpha^2-\beta)$	0
	$+r$	$-2r\alpha+r^2$	
	$-2\alpha+r$	$\alpha^2-2r\alpha+r^2-\beta$	
	$+r$	$3\alpha^2+6r\alpha-3\beta$ = 3 razy współczynnik x	
dzieląc 2)	$-2(\alpha-r)$	$4\alpha^2+4r\alpha+r^2-4\beta$	
odejmując	$-\alpha+r$	$-4\alpha^2-4r\alpha-r^2$ = kwadratowi współczyn. x^2	
	$-r$	4) -4β	
	$-\alpha$	$-\beta$	

(Z tego rachunku widzimy że całe postępowanie jest takie samo jak się wyżej dla równań trzeciego stopnia pokazało z tą jedyną różnicą, że zaczynając skracanie, w dwóch pierwszych kolumnach zachowujemy wszystkie cyfry aż do liczby dziesiętnych, w jakiej pierwiastki mieć chcemy, do rachunku zaś używamy tyle cyfr ile potrzeba skrócenia wymaga.

Aby więcej uwidocznić to postępowanie, weźmy równanie $x^3+ax^2+bx+c=0$, według powyższego działanie do wykonania jest następujące:

1	$+a$	$+b$	$+c$	pierwiastek r
	$+r$	$+ar+r^2$	$+ar^2+r^3+br$	
	$a+r$	$ar+r^2+b$	0	
	$+r$	$+ar+2r^2$		
	$a+2r$	$2ar+3r^2+b$		
	$+r$	$3b$ dodać		
tz lubę dzieląc przez 2)	$a+3r$	$2ar+3r^2+4b$		
~~iloraz wypadnie~~ od ilorazu odejmę r, reszta wypadnie $=-\alpha$	$-\alpha$	a^2 odejmę		
		reszta pozostaje -4β		
		dzieląc przez 4, wypadnie $-\beta$		

i tym sposobem otrzymamy wszystkie trzy ilości r, α, β, wchodzące w skład trzech pierwiastków równania. Pierwiastek r rachuje się, jak wspomniałem sposobem wskazanym, zaś α i β otrzymuje się z kolumny pierwszej i drugiej w których wszystkie cyfry dziesiętne zatrzymanemi zostały. Jeżeli w drugiej kolumnie ostatnia reszta wypadnie ~~ujemną~~ dodatnią, wtedy wszystkie trzy pierwiastki równania będą rzetelnemi, w przeciwnym razie, dwa urojonemi. Ale weźmy jeszcze przykład który nam najlepiej objaśni to nader proste postępowanie.

Szukajmy pierwiastków równania $x^3-5x-7=0$. Rzetelny pierwiastek dodatny leży między 2 i 3, całkowita przeto część pierwiastka jest 2, prowadzimy więc następny rachunek

$r = \overset{2}{\cancel{3}}{,}747346540$

1	0	−5	−7
	2	+4	−2
	4	−1	−9
	6	+8	+8'183
	6'7	+7	−0'817
	7'4	14'69	687824
	8'1	11'69	129176
	8'14	518	123062723
	8'18	16'87	6113277
	8'22	3256	5292150
	8'227	17'1956	821127
	8'234	3272	705732
	8'241	17'5228	115395
	8'2413	57589	105862
	8'2416	17'580389	9533
	8'2419	57638	8822
	8'24194	17'638027	711
	8'24198	247239	706
	8'24202	17'64049939	5
	8'242026	247248	
	8'242032	17'64297187	
	8'242038	329678	
	8'2420385	17'643301548	
	8'2420390	329679	
	8'2420395	17'643631227	
	8'24203954	49452	
	8'24203958	17'643680679	
	8'24203962	49452	
2)	8'2420396.20	17'643730131	
	4'121619810	4121	
$-r=$	−2'747346540	17'643734252	
$\alpha=$	−1'373673270	4121	
		17'643738373	
		330	
		17'643738703	
		330	
		17'643739033	

	17'643739033
$3b=$	−15
	2'643739033
$a^2=$	0
$-4\beta=$	2'643739033
$\beta=$	−0'660934758

Pierwiastkami przeto założonego równania są:

$$x_1 = 2{,}747346540\ldots$$
$$x_2 = -1{,}373673270 + \sqrt{-0{,}660934758}$$
$$x_3 = -1{,}373673270 - \sqrt{-0{,}660934758}$$

Rozumiem że tak szczegółowo wykonany rachunek pierwiastków założonego równania, nie pozostawi w nikim żadnej wątpliwości lub jakiegoś nieporozumienia; przekona on zarazem każdego, że ten sposób obrachowania pierwiastków równania trzeciego stopnia jest najprostszym z dotąd znanych, najłatwiejszym i najprędszym tam zwłaszcza, gdzie chcemy mieć pierwiastki w dziewięciu i więcej cyfrach dziesiętnych.

Jak często niezmiernie łatwo jest znaleźć pierwiastki równania trzeciego stopnia na pozór dość roboty obiecującego, niech posłuży przykład dany przez Gaussa, w celu ćwiczenia się w rozwiązywaniu równań, w „Math. nova comm. Gotting. vol. II 1814–15 pag. 72" Podane równanie jest

$$x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{5}x - \tfrac{1}{20} = 0 \quad \text{albo} \quad x^3 - 1{,}5x^2 + 0{,}6x - 0{,}05 = 0$$

Ponieważ w tem równaniu są same przemiany znaków, jeżeli więc jego pierwiastki są rzeczywistemi, są zarazem dodatnemi, bardzo więc jest łatwo znaleźć pomiędzy jakie liczby przypadają; znajdziemy bowiem dla $x=0$ $f(0) = -0{,}05$ zaś dla $x=1$, $f(1) = +0{,}05$. Kładąc więc, dla bliższego oznaczenia każdego z pierwiastków $x = 0{,}5$, znajdziemy $f(0{,}5) = 0$, zatem $0{,}5$ jest jednym z pierwiastków założonego równania. Zmniejszywszy teraz pierwiastki tegoż równania o $0{,}5$, znajdziemy równanie $x^2 - 0{,}15 = 0$ którego pierwiastki są mniejsze o $0{,}5$ od dwóch innych pierwiastków założonego. A ponieważ z ostatniego równania wypada skróconym sposobem, znanym z Arytmetyki

$$\sqrt{0{,}15} = \pm 0{,}38729833462074\,17$$

gdzie pierwiastek jest rachowany w 17stu cyfrach dla pewności 16stu cyfry, więc powiększając każdy z tych ostatnich pierwiastków o $0{,}5$, znajdziemy trzy pierwiastki założonego równania następujące

$$x_1 = 0{,}11270166537925\,83\ldots$$
$$x_2 = 0{,}5$$
$$x_3 = 0{,}88729833462074\,17\ldots$$

t. j. zupełnie tak jak je podał Gauss w powołanem miejscu.

Sposób Furyjera (: Fourier :)

§37. Skoro pierwiastki podanego do rozwiązania równania wyszczególnionemi zostały, t. j. znaleziono się wiele ma rzeczywistych a wiele urojonych pierwiastków i w jakich granicach każdy z rzeczywistych się znajduje, łatwo za pomocą jednego i to którego kolwiek z podanych dotąd sposobów też pierwiastki obrachować, i tak ~~i tym sposobem~~ podane równanie rozwiązać. Znaleźliśmy atoli, sposobem w §24 wyłożonym, granice pierwiastków i w tych granicach kładąc wszystkie liczby różniące się o 1, nie tylko że ~~bardzo~~ w razie bardzo odległych granic zmuszeni bylibyśmy do wielkiej liczby podstawień, ale jeszcze nie rzadko wypadkiem tych podstawień nie jesteśmy zadowoleni, bo nam wszystkich pierwiastków nie wykazuje. A chociażby liczba pierwiastków niewykrytych

była pusta, i tak nie jesteśmy pewnymi czyli one są rzeczywiście wszystkie urojonemi lub nie. To się wydarza wtedy, gdy pierwiastki równania wszystkie lub tylko niektóre nie wiele się od siebie różnią, tak że między dwie granice o 1 się różniące przypada dwa, trzy, cztery i więcej pierwiastków. Tak np. gdyby jakie równanie miało niewymierne pierwiastki $\sqrt{5}=2{\cdot}236\ldots$, $\sqrt{6}=2{\cdot}449\ldots$, $\sqrt{7}=2{\cdot}645\ldots$, $\sqrt{8}=2{\cdot}828\ldots$ tedy położywszy w témże równaniu $x=2$ i $x=3$, otrzymamy wypadki z temiż samemi znakami i wnieślibyśmy na mocy §12 że też równanie między 2 i 3 nie ma żadnego rzetelnego pierwiastka, albo najwięcej że nie parzystą liczbę tychże pierwiastków. Czyli jednak ta parzysta liczba pierwiastków są wszystkie urojone czyli też ~~równe~~ rzetelne, albo ~~~~ porzystą urojone a (porzystą) ~~~~ rzetelne, żadna skarbów ta nam nie rozstrzygnie. [ani też wiemy jakie są istotnie granice każdego z pierwiastków.] Dopiero podstawiając za x nie liczby różniące się o 1 ale o najmniejszą różnicę między temi pierwiastkami, która tu jest $0{\cdot}18$, a zatém liczby 2, $2{\cdot}18$, $2{\cdot}36$, $2{\cdot}54$ i t. d. przyszlibyśmy do wykrycia każdego z powyższych pierwiastków. Ale jakże podstawiać liczby różniące się o $0{\cdot}18$ kiedy tej różnicy nie znamy, bo nie znamy pierwiastków? Genijalny Lagranż podał sposób za pomocą przerobienia równania na inne którego były pierwiastkami były różnice pierwiastków danego (znalezienia tej różnicy). Ten atoli sposób zaledwo w równaniach trzeciego i czwartego stopnia jest wykonalny; w wyższych zaś stopniach prowadzi do rachunku mogącego odstręczyć najcierpliwszego. Podał też także sposób przez podobne przerobienie danego równania poznania pierwiastków urojonych zawsze jednak z temiż samemi trudnościami połączony.

~~§37.~~ Kiedy więc wykrycie każdego z pierwiastków, nie tylko jego natury ale i granic w których się znajduje, jest, jak to już gdzieindziej wspomniałem, najważniejszém zatrudnieniem w rozwiązywaniu równań, tedy sposób podany przez Furyjera tak wykrycia rzetelnych jako też i zapewnienia się o urojonych pierwiastkach, a nareszcie obrachowanie każdego ~~x~~ rzetelnych, każdego rachmistrza zadowolić musi. Przystępuję więc do tego osobnego sposobu który

~~§38.~~ Furyjer podał w r. 18~~11~~31 w dziele „Analyse des équations déterminées“ A naprzód do wykrycia każdego z pierwiastków oraz zapewnienia się o pierwiastkach urojonych.

§38. Niech będzie równanie

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+A_5x^5+\ldots\ldots+A_{n-3}x^{n-3}+A_{n-2}x^{n-2}+A_{n-1}x^{n-1}+A_nx^n=0$$

w którém współczynnikami są liczbami całkowitemi i z którego pozbyto się tak pierwiastków wymiernych jako też i równych.

Wyprowadziwszy z wielomianu $f(x)$ według §7 wielomiany pochodne znaczące takowe przez $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)\ldots f_{n-1}(x)$, $f_n(x)$ nie dzieląc wspólnego wielomianu $f_2(x)$ przez 2, wielomianu $f_3(x)$ przez 3 i t. d. znajdziemy:

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+A_5x^5+\ldots+A_{n-3}x^{n-3}+A_{n-2}x^{n-2}+A_{n-1}x^{n-1}+A_nx^n$$

$$f_1(x)=1.A_1+2.A_2x+3A_3x^2+4.A_4x^3+5A_5x^4+\ldots+(n-3)A_{n-3}x^{n-4}+(n-2)A_{n-2}x^{n-3}+(n-1)A_{n-1}x^{n-2}+nA_nx^{n-1}$$

$$f_2(x)=1.2A_2+2.3A_3x+3.4A_4x^2+4.5A_5x^3+\ldots+(n-3)(n-4)A_{n-3}x^{n-5}+(n-2)(n-3)A_{n-2}x^{n-4}+\ldots$$

$$f_3(x)=1.2.3A_3+2.3.4A_4x+3.4.5A_5x^2+\ldots+(n-3)(n-4)(n-5)A_{n-3}x^{n-6}+(n-2)(n-3)(n-4)A_{n-2}x^{n-5}+\ldots$$

$$f_4(x)=1.2.3.4A_4+2.3.4.5A_5x+\ldots+(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)A_{n-3}x^{n-7}+(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)A_{n-2}x^{n-6}+$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$f_{n-1}(x)=1.2.3.4\ldots\ldots(n-2)(n-1)A_{n-1}+2.3.4.5\ldots\ldots(n-1)nA_nx$$

$$f_n(x)=1.2.3.4\ldots\ldots(n-2)(n-1)nA_n$$

Położywszy w tych równaniach $x=0$, znajdziemy

$f(0)=A_0$, $f_1(0)=1.A_1$, $f_2(0)=1.2A_2$, $f_3(0)=1.2.3A_3$, $f_4(0)=1.2.3.4A_4$, $f_5(0)=1.2.3.4.5A_5$ .... $f_{n-1}(0)=1.2.3.4\ldots(n-2)(n-1)A_{n-1}$, $f_n(0)=1.2.3\ldots(n-1)nA_n$

skąd $A_0=f(0)$, $A_1=\frac{f_1(0)}{1}$, $A_2=\frac{f_2(0)}{1.2}$, $A_3=\frac{f_3(0)}{1.2.3}$, $A_4=\frac{f_4(0)}{1.2.3.4}$, $A_5=\frac{f_5(0)}{1.2.3.4.5}$

i t.d. $A_{n-2}=\frac{f_{n-2}(0)}{1.2.3\ldots(n-2)}$, $A_{n-1}=\frac{f_{n-1}(0)}{1.2.3\ldots(n-1)}$, $A_n=\frac{f_n(0)}{1.2.3.4\ldots n}$.

Wartości współczynników tym sposobem otrzymane wstawiwszy w pierwiastkowe równanie, takowe przechodzi na następujące:

$$f(x)=f(0)+\frac{f_1(0)}{1}x+\frac{f_2(0)}{1.2}x^2+\frac{f_3(0)}{1.2.3}x^3+\frac{f_4(0)}{1.2.3.4}x^4+\ldots\frac{f_{n-1}(0)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}+\frac{f_n(0)}{1.2.3\ldots n}x^n$$

Jest to równanie, albo raczej szereg ~~Maclaurina~~, znany w teoryi funkcyi pod nazwą szeregu Maclaurina.

W nowem tym równaniu położymy $x+i$ za x gdzie i przyjmujemy za ilość dowolną, ~~bardzo małą ilość i jak ją zwyczajnie nazywają, nieskończenie małą~~ a przy najmniej mniejszą niż 1, a otrzymamy:

$$f(x+i)=f(0)+\frac{f_1(0)}{1}(x+i)+\frac{f_2(0)}{1.2}(x+i)^2+\frac{f_3(0)}{1.2.3}(x+i)^3+\ldots\ldots+\frac{f_n(0)}{1.2.3\ldots n}(x+i)^n$$

Potęgi dwumianu $x+i$ rozwinąwszy według wzoru Newtona i potém uporządkowawszy wyrazy według rosnących potęg ilości i, znajdziemy

$$\begin{aligned} f(x+i)=&f(0)+\frac{f_1(0)}{1}x+\frac{f_2(0)}{1.2}x^2+\frac{f_3(0)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots+\frac{f_n(0)}{1.2.3\ldots n}x^n\\ &+\frac{i}{1}\left\{f_1(0)+\frac{f_2(0)}{1}x+\frac{f_3(0)}{1.2}x^2+\frac{f_4(0)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots+\frac{f_n(0)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}\right\}\\ &+\frac{i^2}{1.2}\left\{f_2(0)+\frac{f_3(0)}{1}x+\frac{f_4(0)}{1.2}x^2+\frac{f_5(0)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots+\frac{f_n(0)}{1.2.3\ldots(n-2)}x^{n-2}\right\}\\ &+\frac{i^3}{1.2.3}\left\{f_3(0)+\frac{f_4(0)}{1}x+\frac{f_5(0)}{1.2}x^2+\frac{f_6(0)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots+\frac{f_n(0)}{1.2.3\ldots(n-3)}x^{n-3}\right\}\\ &\ldots\ldots\\ &+\frac{i^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left\{f_{n-1}(0)+\frac{f_n(0)}{1}x\right\}\\ &+\frac{i^n}{1.2.3\ldots n}f_n(0)\end{aligned}$$

Ponieważ w tém rozwinięciu naocznie widzimy że pierwsza pozioma linija niczém innem nie jest jak tylko pierwotny wielomian równania, następne zaś linije a mianowicie wielomiany w nawiasach, są pochodnemi następnemi z pierwszego wielomianu, mieć zatém będziemy w ogólności

$$f(x+i)=f(x)+\frac{i}{1}f_1(x)+\frac{i^2}{1.2}f_2(x)+\frac{i^3}{1.2.3}f_3(x)+\ldots\ldots+\frac{i^n}{1.2.3\ldots n}f_n(x)$$

Zrównanie to przedstawia nam szereg ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~, znany w dyferencyjalnym rachunku pod nazwą szeregu Taylora, który uważać można za podstawę wielomianów albo raczej funkcyj pochodnych. W powyższej postaci przedstawionym jest ten szereg tylko dla funkcyi wymiernych.

Z tego równania wyciągamy bardzo łatwo następujące prawidło. Położywszy szczególną jaką wartość np. a za x, otrzymamy

$$f(a+i)=f(a)+\frac{i}{1}f_1(a)+\frac{i^2}{1.2}f_2(a)+\frac{i^3}{1.2.3}f_3(a)+\ldots\ldots$$

ponieważ i jest ilością dowolną, możemy ją więc ~~[illegible]~~ tak obrać że znak sumy $\frac{i}{1}f_1(a)+\frac{i^2}{1.2}f_2(a)+\ldots\ldots$ zależeć będzie od pierwszego jej wyrazu t.j. od wyrazu $\frac{i}{1}f_1(a)$, ~~[illegible]~~ co osiągniemy i tak, aby suma $\frac{i^2}{1.2}f_2(a)+\frac{i^3}{1.2.3}f_3(a)+\ldots\ldots$ była ilością prawie nic nie znaczącą, czyli jak ją inaczej wyrażamy, ilością nieskończenie małą, którą zaniedbać, bez obawy niedokładności można, otrzymamy:

$$f(a+i)=f(a)+if_1(a)$$

a skąd

$$f(a-i)=f(a)-if_1(a)$$

Ze zrównania $f(a+i) = f(a) + if_1(a)$ łatwo wyczytać można następujące prawdy:

1° Jeżeli $f_1(a)$ jest dodatną ilością, wtedy $f(x)$, poczynaszy od $x=a$, będzie rosnąć lub maleć według tego jak x rosnąć lub maleć będzie. Jest bowiem

dla $x = a+i$ .... $f(x) = f(a+i) = f(a) + if_1(a)$

zaś dla $x = a-i$ .... $f(x) = f(a-i) = f(a) - if_1(a)$

2° Jeżeli $f_1(a)$ jest ilością odjemną, tedy przeciwnie $f(x)$, poczynaszy od $x=a$, będzie maleć lub rosnąć gdy x rośnie lub maleje. Gdyż

dla $x = a+i$ ... $f(x) = f(a+i) = f(a) - if_1(a)$

zaś dla $x = a-i$ ... $f(x) = f(a-i) = f(a) + if_1(a)$

3° Jeżeli w granicach a i b, gdzie przyjmujemy $b > a$, $f(x)$ jest ciągle dodatną, natenczas i $f(x)$ od $f(a)$ do $f(b)$ będzie ciągle rosnąć skoro x od a do b rośnie.

4° Przeciwnie, jeżeli $f(x)$ w powyższych granicach jest ciągle odjemną ilością, wtedy $f(x)$ od $f(a)$ do $f(b)$ ciągle maleć, gdy x od $x=a$ do $x=b$ rosnąć będzie.

5° Jeżeli więc $f(x)$ w granicach a i b nie zmienia swego znaku, wtedy $f(x)$ ciągle rosnąć lub maleć będzie gdy za a i b dowolne dodatne lub odjemne wartości kłaść będziemy.

6° Z poprzedzających praw oczywiście wypada wniosek, co się już w § 6 dowiodło, że każda algebraiczna wymierna funkcyja między dwiema dowolnemi granicami jest funkcyją ciągłą. Bo z powyższych zrównań okazuje się że bardzo małym albo raczej nieskończenie małym zmianom ilości x czyli a, odpowiadają także nieskończenie małe zmiany $f(x)$ czyli $f(a)$, wyrażone przez $if_1(a)$; a dlatego ta funkcyja w granicach $-\infty$ i $+\infty$ musi być ciągłą.

§ 39. Mając zrównanie $f(x)=0$ i chcąc wiedzieć pomiędzy jakiemi granicami leży każdy jego pierwiastek, wyprowadza się naprzód z jego wielomianu $f(x)$, według poprzedzającego §fu, wielomiany pochodne $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ ..... $f_n(x)$. W tak wyprowadzonych wielomianach położywszy za x pewną i oznaczoną jakąkolwiek dodatną lub odjemną wartość np. $x = \pm a$, oraz napisawszy oznaczenia rzeczonych wielomianów w następującym porządku $f_n(a)$ $f_{n-1}(a)$, $f_{n-2}(a)$ ..... $f_3(a)$, $f_2(a)$, $f_1(a)$, $f(a)$ podpiszmy znaki wypadków z tego podstawienia pod odpowiadającemi oznaczeniami. Tym sposobem otrzymamy szereg znaków w którym pierwszy, t.j. odpowiadający $f_n(x)$ zawsze będzie dodatnym, bo ta funkcyja czyli wielomian nie jest zależnym od x. Przyjmijmy naprzód że $x = a = -\infty$ i że od tej poczynaszy granicy, rośnie aż do $x = a = +\infty$. Ponieważ w takim razie znak każdego pochodnego wielomianu zależy od ostatniego jego wyrazu, bo wiadomo że takowy przewyższa sumę wszystkich jego wyrazów bez względu nawet na ich znaki, więc, jak się pierwej rzekło, znak $f_n(a)$ będzie $+$, znak $f_{n-1}(a)$ będzie $-$, następnie znak $f_{n-2}(a)$ będzie $+$ i t.d. tak że skłądząc $x = a = -\infty$, otrzymamy szereg znaków w którym same tylko przemiany znajdować się będą. Położywszy zaś $x = a = +\infty$, otrzyma się szereg znaków z samych następstw złożony, mianowicie że tu znaki wszystkie będą $+$. Kiedy więc w pierwszym szeregu są same przemiany a w drugim same następstwa znaków, zatem każda przemiana znaków w pierwszym, zastąpioną jest następstwem w drugim szeregu. Liczba przemian znaków w pierwszym szeregu, jak równie liczba następstw w drugim jest $= n$ t.j. stopniowi zrównania. Ale że wszystkie pierwiastki zrównania $f(x)=0$ leżą w granicach $-\infty$ i $+\infty$, przeto kiedy x przechodzi zwolna od $x=-\infty$ do $x=+\infty$, pierwszy szereg znaków traci także zwolna wszystkie przemiany znaków.

Ani wartość żadnej funkcyi czyli wielomianu, jego znaku odmienić nie może, nie przeszedłszy pierwej przez pośredni stan czyli przez zero, wniesiemy stąd że w każdym razie, gdy jeden z wielomianów $f_r(x)$ $f_{r-1}(x)$, $f_{r-2}(x)$ ...... dla pewnej wartości x, stanie się zero, szereg pierwszy znaków utraca jedną przemianę znaków. Szereg pierwszy przemian znaków, zatem nie zmienia się, jeżeli ~~ ~~ wartość $x=a$ jednego lub więcej z wielomianów rzeczonych nie przywodzi do zera.

§ 46. Zobaczmy teraz co się dzieje z szeregiem znaków skoro wartość nieznanej x t.j. wartość a przywodzi jeden z wielomianów, o jakich tu zawsze mowa, do zero. Przypuśćmy naprzód że przez położenie $x=a$, tylko ostatni wielomian t.j. $f(x)$ staje się zero tak, że $f(a)=0$, w którym przypadku wiemy że a jest pierwiastkiem równania $f(x)=0$. Wielomian $f_1(a)$ może przy tém być dodatnym lub odjemnym. Zmieńmy teraz a na $a-i$ a potém na $a+i$, gdzie i tak teraz jak i w dalszym ciągu zawsze uważać będziemy za dość czyli przysłowie lub ubytek nieskończenie mały, t.j. położymy raz $x=a-i$, drugi raz $x=a+i$, tedy, ~~ ~~ według §. poprzedzającego ~~ ~~ będzie

$$f(a-i)=f(a)-if_1(a)=-if_1(a) \quad \text{bo według przyp.}$$
$$f(a+i)=f(a)+if_1(a)=+if_1(a) \quad \text{jest } f(a)=0.$$

Napiszawszy teraz szeregi znaków, które naturalnie zmienić się jedynie w dwóch ostatnich wielomianach, otrzymamy

		$f_1(a)$	$f(a)$
w przypadku gdy $f_1(a)$ jest $+$, dla	$a-i$	$+$	$-$
	a	$+$	0
	$a+i$	$+$	$+$
w przypadku zaś gdy $f_1(a)$ jest $-$, dla	$a-i$	$-$	$+$
	a	$-$	0
	$a+i$	$-$	$-$

Każdy z tych przypadków wyrażając słowy, powiedzieć możemy: jeżeli $f'(x)$ t.j. $f_1(a)$ jest dodatny, $f(x)$ rośnie skoro wartość x t.j. a rośnie i w tym razie jest naprzód odjemny, potém 0 a potem dodatny. Przeciwnie, jeżeli $f_1(a)$ jest odjemny, wtedy $f(x)$ maleje ze wzrostem wartości x, i w tym razie jest naprzód dodatny potém 0 a potém odjemny. W obu tych przypadkach, mianowicie gdy a jest pierwiastkiem równania $f(x)=0$, ginie z wszystkiego szeregu jedna przemiana znaków.

Przyjmijmy powtóre że wartość $x=a$ przywodzi jeden z pośrednich wielomianów do zero ~~tylko~~ ~~nie~~ ale ostatniego nie przywodzi. Dajmy że pewny środkowy wielomian $f_r(x)$ t.j. $f_r(a)$, przez położenie $x=a$ staje się zero, t.j. $f_r(a)=0$. Zmieńmy teraz a na $a-i$ a potém na $a+i$ i zrobimy trzy podstawienia, mianowicie $x=a-i$, $x=a$, i $x=a+i$. W tym razie naturalnie tylko wielomiany stojące z lewej i prawej strony wielomianu $f_r(a)$ zmienić swoje znaki. Z lewej strony wielomianu $f_r(a)$ stoi wielomian $f_{r+1}(a)$ z prawej zaś wielomian $f_{r-1}(a)$. Zobaczmy więc jakie znaki otrzymają też wielomiany przez powyższą zmianę.

Według poprzedzającego §. jest

$$f_{r-1}(a-i)=f_{r-1}(a)-if_r(a)=f_{r-1}(a)$$
$$f_{r-1}(a+i)=f_{r-1}(a)+if_r(a)=f_{r-1}(a)$$
$$f_r(a-i)=f_r(a)-if_{r+1}(a)=-if_{r+1}(a)$$
$$f_r(a+i)=f_r(a)+if_{r+1}(a)=+if_{r+1}(a)$$

bo się przypuściło że jeden z pośrednich wielomianów $f_r(a)=0$

Ponieważ zaś obok stojące wielomiany, mianowicie wielomiany $f_{r+1}(a)$ i $f_{r-1}(a)$ mogą mieć oba znaki + lub oba −, albo ~~jeden~~ oba znaki różne, zatem ku wodzeniem przy przejściu mogą być cztery różne przypadki, mianowicie

1° wielomiany $f_{r+1}(a)$ i $f_{r-1}(a)$ mają oba znaki dodatnie, mieć będziemy

	$f_{r+1}(a)$	$f_r(a)$	$f_{r-1}(a)$
dla $x=a-i$ - - - - - -	+	−	+
a - - - - - -	+	0	+
$a+i$ - - - - - -	+	+	+

2° wielomiany te oba są odjemne, znajdziemy

dla $x=a-i$ - - - - -	−	+	−
a - - - - -	−	0	−
$a+i$ - - - - -	−	−	−

3° wielomian $f_{r+1}(a)$ jest dodatnym a $f_{r-1}(a)$ odjemnym, znaki będą

dla $x=a-i$ - - - - -	+	−	−
a - - - - -	+	0	−
$a+i$ - - - - -	+	+	−

4° wielomian $f_{r+1}(a)$ jest odjemnym a $f_{r-1}(a)$ dodatnym, znaki będą

dla $x=a-i$ - - - - -	−	+	+
a - - - - -	−	0	+
$a+i$ - - - - -	−	−	+

Widzimy naocznie, że jeżeli wartość $x=a$ jeden z pośrednich wielomianów pochodnych przyprowadzi do zero, natenczas pierwszy szereg znaków traci albo dwie, jak w dwóch pierwszych, albo nie traci żadnej przemiany znaków, jak w dwóch drugich przypadkach. Niemasz jednak przypadku, żeby w takim razie szereg pierwszy utracił jedną tylko przemianę znaków. A zatem gdy x przechodzi zwolna od wartości $-\infty$ do $+\infty$, szereg znaków dla pierwszej wartości utraca tyle przemian, ile równanie $f(x)=0$ ma pierwiastków; liczba zaś przemian znaków nie może być nigdy większą jak stopień równania.

§41. W poprzedzającym §fie przypuściliśmy że przez położenie za niewiadomą x pewnej wartości a, jeden tylko z pomiędzy wszystkich wielomianów pochodnych staje się zero. Ale może być przypadek że przez położenie $x=a$, nie jeden, ale dwa, trzy i więcej wielomianów sprowadzi się do zero. Lubo takie przypadki są rzadkie, wszelako nie będzie zbytecznem a nawet bez pożytku, zastanowić się i nad podobnemi wydarzeniami. Dajmy więc na to, że przez położenie $x=a$, wielomiany tak jak po sobie następują, poczynając od pewnego $f_r(a)$ aż do $f_{r-m}(a)$, t.j. wielomiany $f_r(a), f_{r-1}(a), f_{r-2}(a), f_{r-3}(a) \ldots\ldots f_{r-m+1}(a)$ stają się zero, poprzedni zaś przed $f_r(a)$ t.j. wielomian $f_{r+1}(a)$ nie staje się zero ale jest albo dodatnym albo odjemnym, tedy ponieważ

$$f_r(a+i) = f_r(a) + i f_{r+1}(a) = i f_{r+1}(a)$$

$$f_{r-1}(a+i) = f_{r-1}(a) + i f_r(a) + \frac{i^2}{1.2} f_{r+1}(a) = +\frac{i^2}{1.2} f_{r+1}(a)$$

bo $f_r(a)=0$ i $f_{r-1}(a)=0$

mieć zatem będziemy w ogólności

$f_r(a+i) = i f_{r+1}(a)$ a następnie $f_r(a-i) = -i f_{r+1}(a)$

$f_{r-1}(a+i) = \frac{i^2}{1.2} f_{r+1}(a)$ - - - - - - $f_{r-1}(a-i) = +\frac{i^2}{1.2} f_{r+1}(a)$

$f_{r-2}(a+i) = \frac{i^3}{1.2.3} f_{r+1}(a)$ - - - - - - $f_{r-2}(a-i) = -\frac{i^3}{1.2.3} f_{r+1}(a)$

$f_{r-3}(a+i) = \frac{i^4}{1.2.3.4} f_{r+1}(a)$ - - - - - - $f_{r-3}(a-i) = +\frac{i^4}{1.2.3.4} f_{r+1}(a)$

$f_{r-4}(a+i) = \frac{i^5}{1.2.3.4.5} f_{r+1}(a)$ - - - - - $f_{r-4}(a-i) = -\frac{i^5}{1.2.3.4.5} f_{r+1}(a)$

i t. d.

Oznaczywszy szereg znaków dla $x=a$ przez

$$f_{r+1}(a) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \; \ldots\ldots \; f_{r-m}(a)$$

tedy otrzymamy też znaki z poprzedniego przyjmując znak wielomianu $f_{r+1}(a)$ + lub −

dla $x = a-i$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	......
a	$\pm$	0	0	0	0	0	0	......
$a+i$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	......

Skoro więc dla $x=a$ kilka pośrednich wielomianów staje się zero, aby dla tego podstawienia można mieć znaki, któreby z poprzednim ~~...~~ lub następnym szeregiem znaków porównane być mogły, formuje się dwa inne szeregi znaków mianowicie dla $x=a-i$ i dla $x=a+i$ w ten sposób że dla otrzymania pierwszego, pisze się nad każdem zerem znak przeciwny poprzedniemu, dla znalezienia zaś drugiego szeregu, pisze się pod każdem zerem taki sam znak jaki był poprzedzający; postępując w obu szeregach od lewej do prawej ręki. Tym sposobem pierwszy szereg utraci m przemian a drugi zyska tyleż następstw znaków. Ależ wielomian $f_{r-m+1}(a)$ jest ostatnim który się sprowadza do zero, wielomian zaś $f_{r-m}(a)$ może być dodatnym lub też ujemnym, nareszcie m może być liczbą parzystą lub nieparzystą, zatem pierwszy, t.j. wyższy szereg może utracić m lub $m+1$ lub też $m-1$ przemian znaków.

Z tego co się dotąd powiedziało, wiemy z pewnością, że z danego wielomianu równania wyprowadziwszy pochodne, jak w §38 powiedziano, położywszy oraz w tych wielomianach $x=a$ i $x=b$, a nareszcie wypisawszy wypadające z tych podstawień znaki, co sposób jak się wyżej podało, między a i b znajdują się dokładnie tyle pierwiastków, bądź one są wszystkie rzeczywiste bądź urojone bądź też po części rzeczywiste a po części urojone, o ile mniej jest przemian znaków w szeregu dla $x=b$ niż w szeregu dla $x=a$. Że w przypadku gdy różnica liczby przemian znaków w obu szeregach jest $=1$, między a i b leży nie więcej jak jeden rzeczywisty pierwiastek danego równania. Gdyby zaś ta różnica była $=2$, między a i b znajdują się dwa rzeczywiste lub urojone pierwiastki rzeczonego równania. Dla rozstrzygnięcia niepewności, potrzeba ścieśniać granice a i b, kładąc pośrednią pomiędzy niemi liczbę c za x. A jeżeli szereg znaków dla $x=c$ mieć będzie o jedną przemianę znaków mniej niż szereg dla $x=a$, jeden z dwóch pierwiastków leżeć będzie między a i c a drugi między c i b. Jeżeli zaś szereg dla $x=c$ ma tęż samą liczbę przemian znaków jak szereg dla $x=a$ lub też jak szereg dla $x=b$, w pierwszym razie ścieśnić znowu potrzeba granice c i b lub a i c kładąc również pośrednie między niemi liczby i t.d. A jeżeli pomimo następne ścieśniania granic nie dojdziemy do szeregu znaków mającego o jedną tylko przemianę mniej niż szereg wyższy ~~albo niższy~~, wtedy z wielkiem prawdopodobieństwem wnioskować możemy, że dwa wyżej wskazane pierwiastki są urojonemi. Ale że podobne ścieśnianie granic byłoby w bardzo wielu przypadkach nader mozolnem, poda się przeto w dalszym ciągu daleko prędszy sposób zapewnienia się o naturze dwóch między dwie liczby a i b przypadających pierwiastków.

Z dowodów dotąd prowadzonych ze względu znaków wielomianów pochodnych dla różnych wartości x, wnieść także możemy że raz zniknione przemiany znaków, ~~nie~~ już nie wracają chociaż x dalej rosnąć będzie.

Twierdzenie ~~Gaussa~~ Dekarta w §16 sposobem Gaussa dowiedzione wypada z tego co się dotąd powiedziało, jako wniosek. Bo rzeczywiście dla $x=0$ wypada szereg znaków taki jak są w równaniu; dla $x=-\infty$, wypadają same przemiany, zaś dla $x=+\infty$ same następstwa znaków. O ile więc jest mniej przemian znaków w szeregu dla $x=0$ niż w szeregu dla $x=-\infty$, tyle równanie ma pierwiastków naturalnie odjemnych. Ale przemiany które zniknęły z szeregu dla $x=-\infty$ przeszły w szeregu na $x=0$ na następstwa znaków, które są następstwami znaków w równaniu, zatem ich liczba wskazuje liczbę pierwiastków odjemnych. Nadto ponieważ w szeregu dla $x=+\infty$ są same następstwa $+ + + \dots$ przemiany w szeregu na $x=0$, przeszły wszystkie na następstwa znaków. A że wszystkie pierwiastki dodatnie równania leżą między 0 i $+\infty$ a liczba ich równa się zniknionej liczbie przemian w szeregu dla $x=0$, więc liczba tych że pierwiastków odpowiada liczbie przemian znaków w równaniu $f(x)=0$.

Że jeżeli jeden z pośrednich wielomianów za położeniem pewnej wartości za x staje się zero, to wtedy ubywa albo dwie przemiany znaków albo też żadna. Że nareszcie, jeżeli przez położenie pewnej wartości za x, kilka pośrednich wielomianów przywodzi się do zero, lecz ostatni $f(x)$ nie staje się zero, wtedy z pierwszego szeregu znaków ubywa albo parzysta liczba przemian albo żadna. Skoro więc równanie $f(x)=0$ ma $2m$ pierwiastków urojonych a następnie $n-2m$ rzeczywistych, gdzie n oznacza stopień równania, szereg pierwszy znaków utraci m razy po dwie przemiany znaków w ten sposób, że pośrednie wielomiany przywodzić będą pewne wartości x do zero.

Z pewnością więc zawsze będziemy mogli wyrzec, że między a i b tyle tylko jest pierwiastków ile przemian znaków zniknęło z szeregu dla $x=a$, porównanego z szeregiem dla $x=b$. Tudzież że w przypadku ubycia tyle przemian znaków z pierwszego szeregu ile ~~stopni~~ stopień równania ma jedności w sobie, wszystkie pierwiastki tegoż równania leżą między a i b.

§42. Ponieważ to co się dotąd powiedziało najdokładniej wyjaśni się na przykładach, przeto przystępując do takowych, muszę jeszcze przypomnieć, że jeżeli przez położenie ~~np~~ $x=a$, jeden lub kilka pośrednich wielomianów sprowadziło się do zero, wtedy dla porównania szeregu znaków dla tego podstawienia, tak z szeregiem wyższym ~~jako~~ czyli poprzednim jako i następnym, potrzeba zawsze, według wyżej zaznaczonego prawidła, utworzyć szeregi znaków dla $a-i$ i $a+i$ które do porównania bierzemy zamiast szeregu dla $x=a$. Dla pewności i lepszego zatrzymania w pamięci, wskazuję to jeszcze raz rzeczone prawidło. Przypuśćmy że za położeniem $x=a$ otrzymaliśmy ~~np~~ następujący szereg znaków

+ + 0 0 0 0 − 0 0 0 − + 0 + 0 0 0 0 0 −

otrzyma się szeregi znaków dla $x=a-i$ i $x=a+i$, jak następuje:

dla $x=a-i$ . . . + + − + − + − + − + − + − + − + − −
$x=a$ . . . + + 0 0 0 0 − 0 0 0 − + 0 + 0 0 0 0 0 −
$x=a+i$ . . . + + + + + + + − − − − − + + + + + + + + −

A skoro będziemy chcieli porównać szereg znaków dla $x=a$ z szeregiem dla wartości x mniejszej niż a, weźmiemy zamiast tegoż szeregu, szereg dla $x=a-i$; jeżeli zaś tenże szereg dla $x=a$ porównać będziemy chcieli z szeregiem dla wartości ~~nie~~ x większej niż a, weźmiemy do tego porównania szereg dla $x=a+i$.

Ponieważ dla $x=0, 1, 10, 10^2, 10^3 \dots$ oraz dla $x=$ ~~-1~~ $-1, -10, -10^2, -10^3 \dots$ najłatwiej się wypadki otrzymują, z tych więc podstawienia rozpoczynamy. A skoro otrzymamy w wyższym szeregu same przemiany, a w niższym same następstwa znaków, już dalej nie idziemy bo wszystkie pierwiastki zawarte są w granicach dla których takie szeregi otrzymaliśmy.

Niechże nam więc będzie podane równanie

$$f(x)=x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0$$

w którém chcemy znaleźć granice dla każdego z pojedynczych jego pierwiastków, tedy naprzód mamy

$$f(x)=x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101$$
$$f_1(x)=5x^4-12x^3-72x^2+190x-46$$
$$f_2(x)=20x^3-36x^2-144x+190$$
$$f_3(x)=60x^2-72x-144$$
$$f_4(x)=120x-72$$
$$f_5(x)=120$$

Położywszy w tych wielomianach $x=-10, -1, 0, +1, +10$, znajdziemy szeregi znaków

	$f_5(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
dla $x=-10$	+	−	+	−	+	−
-1	+	−	+	−	+	+
0	+	−	−	+	−	−
$+1$	+	+	−	+	+	−
$+10$	+	+	+	+	+	+

Ponieważ szereg dla $x=-10$ ma same premiany, a dla $x=+10$ same następstwa znaków i ten ostatni pokazuje że z pierwszego ubyło pięć premian znaków, więc wszystkie pierwiastki zawarte są między -10 i $+10$. Zastanowiwszy się teraz nad szeregami dla -1, 0 i $+1$, dostrzeżemy że w szeregu dla $x=-1$ jest mniej o jedną premianę znaków niż w szeregu dla $x=-10$ przeto między -10 i -1 jest jeden rzeczywisty pierwiastek. Podobnież, w szeregu dla $x=0$ jest mniej o jedną premianę niż w szeregu dla $x=-1$, więc między -1 i 0 leży również jeden pierwiastek rzeczywisty. Trzy inne pierwiastki leżą między $+1$ i $+10$, bo w szeregu znaków dla $x=+10$ mniej jest o trzy premiany znaków niż w szeregu dla $x=+1$. Jeden z tych ostatnich trzech pierwiastków pewno jest rzeczywisty a dwa mogą być rzeczywiste albo urojone. Tym sposobem już dokładnie wiemy gdzie należy szukać pierwiastków założonego zrównania. Jak rozstrzygać o dwóch na ostatku wspomnionych pierwiastkach czyli one są rzeczywiste czyli też urojone, powie się w dalszym ciągu.

Za drugi przykład niech posłuży zrównanie $f(x)=x^5+3x^4+2x^3-3x^2-2x-2=0$. Postępując wiadomym sposobem, mamy

$$f(x)=x^5+3x^4+2x^3-3x^2-2x-2$$
$$f_1(x)=5x^4+12x^3+6x^2-6x-2$$
$$f_2(x)=20x^3+36x^2+12x-6$$
$$f_3(x)=60x^2+72x+12$$
$$f_4(x)=120x+72$$
$$f_5(x)=120$$

Skoro tu położymy $x=-1$, otrzymamy szereg znaków $+\ -\ 0\ -\ +\ -$ t. j. $f_3(-1)=0$, a dlatego według podanego prawidła musimy tu napisać szeregi znaków dla $x=(-1-i)$ i dla $x=(-1+i)$ które będą

dla $x=(-1-i)$ - - - $+\ -\ +\ -\ +\ -$
$x=(-1+i)$ - - - $+\ -\ -\ -\ +\ -$

Kiedy szereg znaków dla $x=(-1-i)$ ma same premiany znaków, więc już nie potrzebujemy iść w górę t. j. napróżno byśmy położyli $x=-10$, bobyśmy także otrzymali same premiany znaków; dlatego położymy tylko następnie $x=0$, $+1$ i $+10$, z czego otrzymamy następne szeregi znaków, dodając do nich i powyższe

	$f_5(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
dla $x=(-1-i)$ - - - - -	+	−	+	−	+	−
$x=-1$ - - - - -	+	−	0	−	+	−
$x=(-1+i)$ - - - -	+	−	−	−	+	−
$x=0$ - - - - - -	+	+	+	−	−	−
$x=1$ - - - - - -	+	+	+	+	+	−
$x=10$ - - - - - - -	+	+	+	+	+	+

Chcąc porównać szereg znaków dla $x=-1$ z szeregiem dla $x=0$ wziąść potrzeba zamiast pierwszego, szereg dla $x=-1+i$ w którym jak widzimy są trzy, w szeregu zaś dla $x=0$ tylko jedna premiana znaków a zatem dwie z pierwszego ubyły i wskazują że między 0 i -1 są dwa pierwiastki które ~~[illegible]~~ mogą być rzeczywistemi albo urojonemi. Dwa szeregi dla $x=-1-i$ i $x=-1+i$ wskazują także na dwa pierwiastki. Ale ponieważ między tak szczupłemi granicami (i. pomyślmy o ważności i:) w żaden sposób leżeć nie mogą, więc są koniecznie urojonemi. Piąty pierwiastek leży jak widzimy między 1 i 10 a ten jest rzeczywistym. Tak tedy wiemy że między -1 i 0 leżą cztery pierwiastki, z których dwa pewno są urojone dwa zaś inne może także urojone a może też rzeczywiste, zaś między 1 i 10 koniecznie rzeczywisty i mamy wskazane wszystkie pięć pierwiastków oraz wiemy gdzie rzeczywistych szukać.

Trzecim przykładem niech nam będzie równanie

$$f(x) = x^8+2x^7-7x^5-3x^3+5x^2-8=0$$

tedy

$$f(x) = x^8+2x^7-7x^5-3x^3+5x^2-8$$
$$f_1(x) = 8x^7+14x^6-35x^4-9x^2+10x$$
$$f_2(x) = 56x^6+84x^5-140x^3-18x+10$$
$$f_3(x) = 336x^5+420x^4-420x^2-18$$
$$f_4(x) = 1680x^4+1680x^3-840x$$
$$f_5(x) = 6720x^3+5040x^2-840$$
$$f_6(x) = 20160x^2+10080x$$
$$f_7(x) = 40320x+10080$$
$$f_8(x) = 40320$$

A połóżmy w tych wielomianach $x=-1, 0, +1, +10$, tudzież zważywszy że dla $x=0$ trzy z tych wielomianów sprowadzają się do zera, otrzymamy szeregi znaków jak następuje:

	$f_8(x)$	$f_7(x)$	$f_6(x)$	$f_5(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
dla $x=-1$ ----	+	−	+	−	+	−	+	−	+
$0-i$ ----	+	+	−	−	+	−	+	−	−
0 ----	+	+	0	−	0	−	+	0	−
$0+i$ ----	+	+	+	−	−	−	+	+	−
$+1$ ----	+	+	+	+	+	+	−	−	−
$+10$ ----	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Z tych szeregów znaków widzimy że dla $x=0-i$ jest o trzy przemiany mniej niż dla $x=-1$, przeto między -1 i 0 leżą trzy pierwiastki z których jeden jest pewno rzetelnym, a dwa inne może rzetelne a może też urojone. W szeregu dla $x=0+i$ jest o dwie przemiany znaków mniej niż w szeregu dla $x=0-i$, co wskazuje że w tych granicach leżą dwa pierwiastki które pewno są urojonemi bo w tak szczupłych granicach żaden rzetelny pierwiastek być nie może. Podobnież, między 0 i $+1$ leżą dwa pierwiastki, bo szereg dla $x=+1$ ma o dwie przemiany mniej niż dla $x=0+i$. Te też pierwiastki mogą być rzetelne lub urojone. Nareszcie, między $+1$ i $+10$ znajduje się jeden pierwiastek a ten rzetelny. Tak tedy założone równanie ma dwa pierwiastki pewno rzetelne (z których jeden leży między -1 i 0 a drugi między $+1$ i $+10$; pierwszy więc jest odjemny a drugi dodatny, o czem już z §13 mogliśmy się przekonać. Między -1 i 0 ma też równanie cztery pierwiastki z których dwa są pewno urojonemi a dwa może urojonemi a może rzetelnemi. Nakoniec rzeczone równanie ma także między 0 i $+1$ dwa pierwiastki których natura jeszcze nie jest wiadoma t.j. nie jest nam wiadomo czyli one są rzetelnemi lub urojonemi. A chociaż natura czterech pierwiastków niewiadoma, wszelako znamy dokładnie granice każdego z ośmiu.

(Za ostatni przykład weźmy jeszcze równanie

$$x^7-21x^5-3x^3-5x-6=0$$

tedy

$$f(x) = x^7-21x^5-3x^3-5x-6$$
$$f_1(x) = 7x^6-105x^4-9x^2-5$$
$$f_2(x) = 42x^5-420x^3-18x$$
$$f_3(x) = 210x^4-1260x^2-18$$
$$f_4(x) = 840x^3-2520x$$
$$f_5(x) = 2520x^2-2520$$
$$f_6(x) = 5040x$$
$$f_7(x) = 5040$$

Połóżmy teraz $x=-10, -1, 0, +1$ i $+10$ oraz piszmy zaraz szeregi znaków pomocnicze, otrzymamy następujące szeregi znaków:

	$f_7(x)$	$f_6(x)$	$f_5(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
dla $x=-10$ …	+	−	+	−	+	−	+	−
$-1-i$ …	+	−	+	+	−	+	−	+
-1 …	+	−	0	+	−	+	−	+
$-1+i$ …	+	−	−	+	−	+	−	+
$0-i$ …	+	−	[illegible]	+	−	+	−	−
0 …	+	0	−	0	−	0	−	−
$0+i$ …	+	+	−	−	−	−	−	−
$+1-i$ …	+	+	−	−	−	−	−	−
$+1$ …	+	+	0	−	−	−	−	−
$+1+i$ …	+	+	+	−	−	−	−	−
$+10$ …	+	+	+	+	+	+	+	+

z których czytamy że pomiędzy -10 i -1, -1 i 0 tudzież $+1$ i $+10$ znajdują się po jednym rzetelnym pierwiastku, w pierwszych zaś granicach $0-i$ i $0+i$ zawarte cztery pierwiastki, pewno są urojone; przez co wszystkich siedmiu pierwiastków założonego równania mamy zawarte granice oraz ich naturę.

Rozumiem że te cztery przykłady są dostatecznemi aby dać każdemu starczący postępowania dla wykrycia pierwiastków danego lub dowolnie wziętego liczbowego równania.

§43. W każdym z przytoczonych czterech przykładów napotkaliśmy na dwie granice pomiędzy które przypadają dwa pierwiastki albo trzy. O jednym z tych ostatnich powiedzieliśmy że jest pewno rzetelnym, ale dwóch innych, jakoteż dwóch pierwszych jeszcze dotąd natury nie oznaczyliśmy, mianowicie czyli one są rzetelne lub też urojone. Jakiego przyjdziemy do tego oznaczenia? Otóż już poprzednio wspomniałem, że dwie granice pomiędzy które przypadają, potrzeba ścieśnić, a jeżeli są rzetelne, to je można będzie oddzielić i zamknąć każdy między dwie inne bliższe granice. Tak np. w pierwszym przykładzie między $+1$ i $+10$ zawarte są trzy pierwiastki z których jeden jest rzetelnym a o innych dwóch nie wiadomo czyli są rzetelne lub urojone. Ścieśniając więc te granice, połóżmy $x=5$ a znajdziemy szereg znaków $+ + + + + +$ t. j. taki następstwa jak dla $x=+10$ na dowód że rzeczone trzy pierwiastki leżą między $+1$ i $+5$. Kiedy już tak blisko mamy dwie granice pomiędzy które pierwiastki przypadają, najlepiej położyć teraz $x=2, 3, 4$. Wypisawszy szeregi znaków, znajdziemy

dla $x=1$ …	+	+	−	+	+	−
2 …	+	+	−	−	+	−
3 …	+	+	+	−	−	−
4 …	+	+	+	+	+	−
5 …	+	+	+	+	+	+

Skąd widzimy że rzetelny pierwiastek leży między 4 i 5, a dwa inne między 2 i 3, ale jeszcze nie wiemy czy rzetelne czy też urojone. Ścieśniając więc dalej granice 2 i 3 znaleźlibyśmy że te pierwiastki leżą między $2{,}3$ i $2{,}4$. Dalej atoli nie chcę ścieśniać tych granic, jest to bowiem zawsze dosyć mozolne szczególniej z dziesiętnemi ułamkami, a powiedziałem już dawniej że się w dalszym ciągu poda sposób daleko łatwiejszy. Pierwiastki

Pierwiastki też o których tu chodzi mogą nawet być równe, a w takim razie ścieśniając granice nie doszlibyśmy do ich odłączenia. Tę trudność pokonać tylko można za pomocą geometrycznego wykreślenia, w miejscu którego (i na zasadzie) podam tu praktyczny sposób rozstrzygnienia wątpliwości co do natury dwóch, w pewnych granicach wskazanych pierwiastków; [illegible]

Aby z pewnością orzec czyli dwa między pewnemi granicami wskazane pierwiastki są rzeczywiste lub urojone, tak postąpić należy: [illegible] pomiędzy dwa szeregi znaków dla granic między którymi wskazane są dwa pierwiastki, piszemy tak nazwane skaźniki t.j. liczby wskazujące nam ile, aż do pewnego wielomianu, wyższy szereg ma więcej przemian znaków niż niższy. Tak np. jeżeli dwa rzeczone szeregi znaków są jak następuje

+ − − + − + − +
+ + − − − + − +

skaźniki piszemy następnie

+ − − + − + − +
0 1 0 1 2 2 2 2
+ + − − − + − +

Według tego prawidła będzie też

+ − + − −
0 1 2 3 2
+ + + + −

tudzież

+ + − − +
0 0 1 1 2
+ + + + +

Ażeby zapomocą podać się mającego sposobu wyrzec czyli są pierwszej lub drugiej natury,

Jeżeli między dwiema granicami a i b, zawsze w rozumieniu że $b > a$, znajdują się dwa rzeczywiste lub urojone pierwiastki, trzy ostatnie skaźniki powinny być 012, i znaki wielomianów $f(a)$ i $f(b)$ być też same. [illegible] W przypadku że trzy ostatnie skaźniki nie są jak powiedziano, mianowicie gdy ostatnia skaźnika nie jest 2, natenczas granice a i b ścieśnić potrzeba kładąc liczbę c przypadającą między a i b za x i wypisać znaki wielomianów $f(c)$, $f_1(c)$, $f_2(c)$ i t.d. pomiędzy szeregami dla $x = a$ i $x = b$ i ten nowy szereg znaków porównać z każdym z poprzednich skąd się pozna czyli dwa pierwiastki o których mowa już są od innych oddzielone lub nie. Jeżeli to nie jest, potrzeba albo granice a i c, lub też c i b znowu ścieśnić, dopóki nie przyjdziemy do trzech ostatnich skaźników, jak powiedziano, 012. Doprowadziwszy granice do tego stanu i przypuszczając że też granice są a i b, t.j. te które dają trzy ostatnie skaźniki 012, aby się zapewnić czyli tym sposobem wskazane dwa pierwiastki są rzeczywiste lub urojone, postąpić należy następnie: szuka się ilorazów $\frac{f(a)}{f_1(a)}$ i $\frac{f(b)}{f_1(b)}$, a jeżeli jeden z nich, lub też ich suma, bez względu na znaki, jest większa niż różnica granic $b - a$, (lub jej równa), wtedy z pewnością twierdzić możemy że te dwa pierwiastki są urojone. Tak np. w pierwszym z powyższych przykładów, otrzymaliśmy w tym to §ie

	$f_5(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
dla $x = 2$	+	+	−	−	+	−
	0	0	1	0	1	2
$x = 3$	+	+	+	−	−	−

Trzy ostatnie skaźniki są 012 i ostatnia wskazuje że między 2 i 3 mogą znajdować się dwa pierwiastki. Chcemy poznać ich naturę, tedy mamy:

$f(a) = f(2) = -21$, $f_1(a) = f_1(2) = +30$, $f(b) = f(3) = -32$, $f_1(b) = f_1(3) = -43$

skąd $\frac{f(a)}{f_1(a)} = \frac{f(2)}{f_1(2)} = -\frac{21}{30} = -\frac{7}{10}$ a $\frac{f(b)}{f_1(b)} = \frac{f(3)}{f_1(3)} = \frac{32}{43}$ a następnie

$$\frac{f(b)}{f_1(b)} + \frac{f(a)}{f_1(a)} = \frac{f(3)}{f_1(3)} + \frac{f(2)}{f_1(2)} = \frac{32}{43} + \frac{7}{10} = \frac{621}{430} > 3-2.$$

Dwa przeto w powyższych granicach wskazane pierwiastki są urojone.

Gdyby zaś jeden z powyższych ilorazów albo ich suma była mniejszą niż różnica $b-a$, wtedy to będzie znakiem że jeszcze nie możemy pewności wyrzec o naturze tych pierwiastków, i że potrzeba jeszcze więcej ścieśnić granice. Ale jeżeli te pierwiastki są rzetelne, mogą przy tem być równe i samo ścieśnianie granic nie doprowadziłoby nas naturalnie do ich odgraniczenia. W takim przeto razie nim przystąpimy do ścieśnienia granic, potrzeba spróbować czyli $f(x)$ i $f_1(x)$ nie mają wspólnego dzielnika. Znalazłszy takowy, zrównać go potrzeba do zera (lub pierwiastki) i rozwiązać zrównanie. Jeżeli się otrzyma pierwiastek tego ostatniego zrównania nie przypadający między granice a i b, będzie to dowodem że w tych granicach zrównanie $f(x)=0$ nie ma żadnego pierwiastka (rzetelnego), że zatem dwa wskazane są urojonemi. W przeciwnym razie, znajdzie się tym sposobem jeden z szukanych pierwiastków, drugi przeto będzie mu równy.

Nie znalazłszy wspólnego dzielnika wielomianów $f(x)$ i $f_1(x)$ przystąpić dopiero należy do ścieśnienia granic i to działanie powtarzać dopóty, aż się oba pierwiastki oddzielą, lub też wspomniane ilorazy pokażą, że są urojonemi. Przypomnieć nam tu jeszcze że podstawiania różnych wartości za x tak w $f(x)$ jako też i następujących pochodnych (wielomianów) najłatwiej się wykonywają sposobem w §8 podanym.

Niechby nam podane było zrównanie $x^3-7x+7=0$ którego pierwiastki ograniczyć chcemy, oraz zbadać ich naturę, tedy

$$f(x)=x^3-7x+7$$
$$f_1(x)=3x^2-7$$
$$f_2(x)=6x$$
$$f_3(x)=6$$

skąd

dla $x =$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
-10	+	−	+	−
-1	+	−	−	+
$0-i$	+	−	−	+
0	+	0	−	+
$0+i$	+	+	−	+
$+1$	+	+	−	+
	0	0	1	2
$+10$	+	+	+	+

Jeden pierwiastek tego zrównania leży jak widzimy między -10 i -1 a dwa inne między $+1$ i $+10$. Ponieważ trzy ostatnie skazówki są 012, powyższe zatem prawidło możemy tu zastosować i znajdziemy $f(1)=+1$, $f_1(1)=-4$, $f(10)=+937$, $f_1(10)=+293$ a następnie

$$\frac{f(10)}{f_1(10)}+\frac{f(1)}{f_1(1)}=\frac{937}{293}+\frac{1}{4}=3\frac{525}{1172} < 10-1,$$ przeto nic nie wiemy o naturze tych dwóch pierwiastków. Szukając wspólnego dzielnika wielomianów $f(x)=x^3-7x+7$ i $f_1(x)=3x^2-7$, takowego nie znajdziemy, a zatem ścieśnić potrzeba granice. Położywszy $x=2$ znajdziemy szereg znaków $+ + + +$ na dowód że te dwa pierwiastki leżą między 1 i 2. Położywszy nareszcie $x=1{,}5$ znajdzie się szereg znaków $+ + - -$ co nam wskazuje że te pierwiastki są rzetelne i że jeden leży między 1 i $1{,}5$ a drugi między $1{,}5$ i 2.

§44. Lecz nie tylko w przypadku gdy trzy ostatnie skazówki są 012 możemy mieć dokładną skazówkę czyli dwa wskazane pierwiastki są rzetelne lub urojone, ale też i wtedy gdy postępując w szeregu skazówek od prawej do lewej, czyli napotkamy skazówkę pierwszą 1 a po niej 2, przed nią zaś 0, możemy z wielomianów odpowiadających skazówkom 1 i 2 zupełnie tym samym sposobem jak z wielomianów $f(x)$ i $f_1(x)$ ~~o...~~ wnioskować, czyli wskazane pierwiastki są rzetelne lub urojone. Chcemy ~~np.~~ znaleźć granice pierwiastków zrównania

$$x^7+2x^6-2x^4-4x^3+4x+8=0$$

oraz zbadać ich naturę, tedy najprzód mamy:

$f(x) = x^7 + 2x^6 - 2x^4 - 4x^3 + 4x + 8$
$f_1(x) = 7x^6 + 12x^5 - 8x^3 - 12x^2 + 4$
$f_2(x) = 42x^5 + 60x^4 - 24x^2 - 24x$
$f_3(x) = 210x^4 + 240x^3 - 48x - 24$
$f_4(x) = 840x^3 + 720x^2 - 48$
$f_5(x) = 2520x^2 + 1440x$
$f_6(x) = 5040x + 1440$
$f_7(x) = 5040$

	$f_7(x)$	$f_6(x)$	$f_5(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
−10 …	+	−	+	−	+	−	+	−
−1 …	+	−	+	−	−	+	−	+
0−i …	+	+	−	−	−	+	+	+
skąd dla x = 0 …	+	+	0	−	−	0	+	+
0+i …	+	+	+	−	−	−	+	+
+1 …	+	+	+	+	+	+	+	+

Z szeregów znaków widzimy naprzód, że między −10 i −1 znajduje się jeden pierwiastek a ten naturalnie rzeczywisty; że pomiędzy −1 i 0 jest cztery pierwiastki których natury jeszcze nie znamy, a następnie że między 0 i 1 są również dwa pierwiastki których natury także nie znamy. Zatrudnijmy się więc zbadaniem tej natury tak pierwszych czterech, jako też i dwóch ostatnich. Najprzód ścieśnijmy granice czterech pierwszych pierwiastków kładąc pośrednią pomiędzy −1 i 0, liczbę −0·5, skąd znajdziemy szereg znaków + − − + − + + +. Napiszmy ten szereg znaków między powyższemi dla −1 i 0 czyli 0−i, oraz skarówki między temi szeregami jak następuje

dla	$f_7(x)$	$f_6(x)$	$f_5(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
~~0−i~~ …	+	+	−	−	−	+	+	+
−1 …	+	−	+	−	−	+	−	+
	0	0	1	1	0	0	1	2
−0·5 …	+	−	−	+	−	+	+	+
	0	1	0	1	2	2	2	2
0−i …	+	+	−	−	−	+	+	+

‡ Biorąc od końca z następnych skarówek 2, będą trzy ostatnie 0 0 0, a zatem $f_1(x)=0$ nie ma żadnego pierwiastka między −0·5 i 0, czyli wskazane dwa są urojonemi.

Z tego widzimy że dwa z owych czterech pierwiastków, jeżeli są rzeczywiste, leżą między −1 i −0·5 a dwa inne między −0·5 i 0.

Szereg skarówek dla dwóch pierwszych, kończy się na 012, więc ten mo[…] żemy zaraz użyć wyżej wskazanego prawidła na poznanie natury dwóch tych pierwiastków. Ponieważ $f(a)=f(-1)=+7$, $f_1(a)=f_1(-1)=-5$, zaś $f(b)=f(-0{\cdot}5)=+6{\cdot}3984375$, $f_1(b)=f_1(-0{\cdot}5)=+1{\cdot}734375$, skąd $\frac{f(b)}{f_1(b)}=\frac{6{\cdot}3984375}{1{\cdot}734375}$ zaś $\frac{f(a)}{f_1(a)}=\frac{f(-1)}{f_1(-1)}=\frac{7}{-5}$ i ponieważ każdy z tych ilorazów, a tem więcej ich suma bez względu na znaki jest większy niż różnica $b-a=-0{\cdot}5+1=0{\cdot}5$, zatem dwa te pierwiastki są urojone.

F $\frac{f(-0{\cdot}5)}{f_1(-0{\cdot}5)}=$

Co do dwóch drugich między −0·5 i 0, tubo szereg skarówek nie kończy się na 012, wspólnie postępując w tym szeregu od prawej do lewej ręki, natrafiamy pierwszą skarówkę 1 a z prawej jej strony 2 z lewej 0.⁊ Weźmijmy te ~~[illegible]~~ wielomiany odpowiadające skarówkom 2 i 1, i wielomiany $f_3(x)$ i $f_4(x)$ i połóżmy w nich za x raz −0·5, a drugi raz 0, znajdziemy $f_3(a)=f_3(-0{\cdot}5)=+6{\cdot}875$, $f_4(a)=f_4(-0{\cdot}5)=+27$ zaś $f_3(b)=f_3(0)=-24$, $f_4(b)=f_4(0)=-48$; skąd znowu wypadnie ╪ $\frac{f_3(b)}{f_4(b)}=\frac{f_3(0)}{f_4(0)}=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$, ~~$\frac{f_3(a)}{f_4(a)}=\frac{f_3(-0{\cdot}5)}{f_4(-0{\cdot}5)}=$ [illegible]~~. Aż znowu je[…] den z tych ilorazów jest równy różnicy b−a a drugi nawet większy, zatem wnieśmy że te dwa pierwiastki są urojone, bo szukając wspólnego dzielnika wielomianów $f_3(x)$ i $f_4(x)$ takowego nie znajdziemy.

⁊ co pokazuje że z równania $f_5(x)=0$ nie ma żadnego, z równania $f_4(x)=0$ jeden, a z równania $f_3(x)=0$ dwa pierwiastki w granicach −0·5 i 0. Zobaczmy czyli te są rzeczywiste lub urojone?

╪ $\frac{f_3(a)}{f_4(a)}=\frac{f_3(-0{\cdot}5)}{f_4(-0{\cdot}5)}=\frac{6{\cdot}875}{27}=0{\cdot}625$

Pozostają nam jeszcze dwa pierwiastki między 0 i +1. Wypisawszy szeregi znaków dla 0 czyli 0+i i dla 1, tudzież zapisawszy szereg skarówek, będzie

dla								
0+i …	+	+	+	−	−	−	+	+
	0	0	0	1	1	1	2	2
1 …	+	+	+	+	+	+	+	+

Ponieważ nie natrafiamy w szeregu skarówek następujących po sobie 012, więc potrzeba ścieśnić granice. Położywszy x = 0·5, znajdziemy szereg znaków

szereg znaków	+	+	+	+	−	−	−	+
	0	0	0	0	1	1	1	2
a dla x = 1 …	+	+	+	+	+	+	+	+

co pokazuje że jeszcze bardziej ścieśnić potrzeba te granice. Połóżmy $x=0{\cdot}8$, a znajdziemy ... dla

dla 0·8	+	+	+	+	+	−	+
	0	0	0	0	0	1	2
1	+	+	+	+	+	+	+

~~Ale~~ i możemy ~~teraz~~ już użyć podanego prawidła, Ponieważ ~~[illegible]~~

$f(b)=f(1)=+9,\ f_1(b)=f_1(1)=+3,\ f(a)=f(0{\cdot}8)=+9{\cdot}0668032,\ f_1(0{\cdot}8)=-2{\cdot}008832$

przeto $\frac{f(1)}{f_1(1)}=\frac{9}{3}=3,\ \frac{f(0{\cdot}8)}{f_1(0{\cdot}8)}=\frac{9{\cdot}0668032}{-2{\cdot}008832}$, a każdy z tych ilorazów jest większym niż różnica $b-a=1-0{\cdot}8=0{\cdot}2$, zatem dwa wskazane pierwiastki między 0 i 1 są urojonemi. Założone przeto równanie ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty między −10 i −1, a resztę urojonych.

Niechby nam jeszcze danem było równanie

$$9x^6+30x^5+22x^4+10x^3+17x^2-20x+4=0$$

którego pierwiastki ograniczyć chcemy oraz wybadać ich naturę; tedy

$f(x)=9x^6+30x^5+22x^4+10x^3+17x^2-20x+4$
$f_1(x)=54x^5+150x^4+88x^3+30x^2+34x-20$
$f_2(x)=270x^4+600x^3+264x^2+60x+34$
$f_3(x)=1080x^3+1800x^2+528x+60$
$f_4(x)=3240x^2+3600x+528$
$f_5(x)=6480x+3600$
$f_6(x)=6480$

	$f_6(x)$	$f_5(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
dla $x=-10$	+	−	+	−	+	−	+
	0	0	0	1	1	1	2
−1	+	−	+	+	−	+	+
	0	1	2	2	3	3	2
0	+	+	+	+	+	−	+
	0	0	0	0	0	1	2
+1	+	+	+	+	+	+	+

Z pierwszego tego rachunku już widzimy, gdzie t. j. w jakich granicach szukać mamy wszystkich sześciu pierwiastków. Leżą one bowiem wszystkie między −10 i +1, mianowicie zaś dwa leżą między −10 i −1, dwa między −1 i 0 a dwa ostatnie między 0 i +1.

Badajmy teraz naturę naprzód dwóch pierwiastków między −10 i −1. Ponieważ ani trzy ostatnie skazówki nie są 012, ani też w tym szeregu nie napotykamy takiego następstwa skazówek, przeto zatem przystępujemy do ścieśnienia granic. Kładzę $x=-5$, skąd otrzymamy szereg znaków taki sam jak dla $x=-10$ na dowód że dwa wskazane pierwiastki leżą między −5 i −1. Ścieśniwszy przeto jeszcze więcej te granice przez położenie pośredniej liczby −3 za x, otrzymamy szereg znaków znowu taki sam jak dla −10 i −5 otrzymaliśmy na dowód, że wskazane pierwiastki leżą między −3 i −1. Ponieważ tu koniecznie też sam szereg skazówek t. j. 0,001112 wypaść musi, przeto musimy jeszcze więcej ścieśnić granice −3 i −1 kładzę pośrednią liczbę −2. Położenie tej liczby za x, sprowadzi tak wielomian $f(x)$, jako też i wielomian $f_1(x)$ do zero, co dowodzi że $x=-2$ jest podwójnym pierwiastkiem równania $f(x)=0$. Ale że ~~w powyższych granicach dwa były wskazane pierwiastki więc znaleziony jest podwójnym t. j. równanie $f(x)=0$ ma dwa pierwiastki równające się liczbie −2.~~ Dwa więc wskazane pierwiastki są między sobą równe i każdy $=-2$.

Dwa drugie pierwiastki leżą między −1 i 0; a chociaż trzy ostatnie skazówki nie są 012, to przecież w szeregu skazówek natrafiamy takie następstwo tak że skazówka 2 odpowiada wielomianowi $f_4(x)$ a skazówka 1, wielomianowi $f_5(x)$. Połóżmy więc w tych wielomianach raz $x=a=-1$ a drugi raz $x=b=0$

znajdziemy $f_4(a)=f_4(-1)=+168$, $f_5(a)=f_5(-1)=-2880$, zaś $f_4(b)=f_4(0)=+528$, $f_5(b)=f_5(0)=+3600$. Ponieważ (nietylko) każdy z ilorazów $\frac{f_4(0)}{f_5(0)}=\frac{528}{3600}$, $\frac{f_4(-1)}{f_5(-1)}=\frac{168}{-2880}$, ale nawet ich suma bez względu na znaki jest mniejszą niż różnica $b-a=0+1$, zatem dla poznania natury tych pierwiastków potrzeba ścieśnić granice, gdyż próbując czyli wielomiany $f_4(x)=3240x^2+3600x+528$ i $f_5(x)=6480x+3600$ nie mają wspólnego dzielnika, takowego nie znajdziemy. Połóżmyż więc $x=-0{,}2$, a wypisując szereg znaków wraz z szeregiem dla $x=0$, oraz kładąc skaźniki między niemi znajdziemy

	$f_6(x)$	$f_5(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
dla $x=-0{,}2$	+	+	−	+	+	−	+
	0	0	1	2	2	2	2
$x=0$	+	+	+	+	+	−	+

Tu znajdziemy $f_3(a)=f_3(-0{,}2)=+17{,}76$, $f_4(a)=f_4(-0{,}2)=-62{,}4$, tudzież $f_3(b)=f_3(0)=+60$, $f_4(b)=f_4(0)=+528$, skąd suma ilorazów $\frac{f_3(0)}{f_4(0)}+\frac{f_3(-0{,}2)}{f_4(-0{,}2)}$ t. j. $\frac{60}{528}+\frac{17{,}76}{-62{,}4}=0{,}4\ldots$ t. j. większa niż różnica $b-a=0+0{,}2$, co pokazuje że dwa pierwiastki równania $f_3(x)=0$ są urojonemi; dodawszy więc skaźniki 2 od wszystkich następnych poczynając od $f_3(x)$, znajdziemy szereg skaźników 0010000, co nam dowodzi, że (proponowane) $f(x)=0$ w granicach -1 i 0 albo w przypadku $-0{,}2$ i 0 nie ma żadnego pierwiastka. Wskazane poprzednio pierwiastki w tym rachunku, są urojonemi.

Rozpatrzmy nakoniec dwa pierwiastki wskazane między 0 i $+1$. Tu wprost przystępujemy do wyżej wskazanego prawidła, bo ostatnie skaźniki są 0 1 2. Ponieważ $f(b)=f(1)=+72$, $f_1(b)=f_1(1)=336$, zaś $f(a)=f(0)=+4$, $f_1(a)=f_1(0)=-20$, skąd $\frac{f(1)}{f_1(1)}=\frac{72}{336}$, $\frac{f(0)}{f_1(0)}=\frac{4}{-20}$, a każdy z tych ilorazów ale nawet ich suma jest mniejszą niż $b-a=1-0$, zatem przystąpić należy do dalszego ścieśnienia granic, aby się dwa wskazane pierwiastki od siebie oddzieliły. Nim jednak to ścieśnienie przedsięweźmiemy, należy wprzód spróbować czyli wielomiany $f(x)$ i $f_1(x)$ nie mają wspólnego dzielnika. Szukając takowego, znajdziemy go rzeczywiście $3x^2+5x-2$, a zrównawszy go do zera, potrzeba rozwiązać równanie $3x^2+5x-2=0$, (którego) znalazłszy pierwiastki -2 i $\frac{1}{3}$, wiemy, że pierwszy pierwiastek jest owym podwójnym który był wskazany w granicach -10 i -1; że i drugi $\frac{1}{3}$ przypada w granice między któremi dzieliśmy, t. j. w granice 0 i $+1$, więc i ten drugi pierwiastek jest podwójnym równania $f(x)=0$ na początku założonego. Ma więc rzeczone równanie pierwiastki $x_1=-2$, $x_2=-2$, $x_3=\frac{1}{3}$, $x_4=\frac{1}{3}$ i oprócz tego dwa urojone między $-0{,}2$ i 0. Tym sposobem nietylko (dokonaliśmy) ograniczenia pierwiastków podanego równania, ale nawet same pierwiastki, rachunkiem dalszym do ograniczenia, znaleźliśmy i naturę ich wybadali.

Według § 21, znaleziony wspólny dzielnik $3x^2+5x-2=3x^2+6x-x-2=$ $=3x(x+2)-(x+2)=(3x-1)(x+2)$. Każdy z tych linijowych czynników zrównawszy do zera, otrzymamy pierwiastki równania $3x^2+5x-2=0$, mianowicie raz $3x-1=0$ skąd $x=\frac{1}{3}$, tudzież $x+2=0$ t. j. $x=-2$. Ale według powołanego §fu tak pierwszy jako i drugi pierwiastek jest podwójnym.

Gdybyśmy tu położyli -2 i $\frac{1}{3}$ za x zobaczylibyśmy także że dwa ostatnie wielomiany, mianowicie $f_1(x)$ i $f(x)$ wypadłyby $=0$, skąd wnieśiemy, że jeżeli za położeniem α za x, m ostatnich wielomianów staje się zero, równanie $f(x)=0$, ma m pierwiastków równych α.

Jako ostatni przykład weźmy jeszcze równanie

$$f(x) = x^6 - 6x^5 + x^4 + 48x^3 - 8x^2 + 54x - 81 = 0.$$

Wyprowadziwszy wiadomym sposobem wielomiany pochodne i potém położywszy w nich -10, -1, 0, $+1$, $+10$ za x, otrzymamy szeregi znaków jak następuje

dla $x =$	$f_6(x)$	$f_5(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
-10	+	−	+	−	+	−	+
	0	0	0	0	1	1	1
-1	+	−	+	−	−	+	−
	0	0	0	1	0	0	0
0	+	−	+	+	−	+	−
	0	0	1	0	1	2	2
$+1-i$	+	−	−	+	+	+	−
$+1$	+	0	−	+	+	+	−
$+1+i$	+	+	−	+	+	+	−
	0	0	1	2	2	2	3
10	+	+	+	+	+	+	+

Te szeregi znaków pokazują, że wszystkie sześć pierwiastków leżą w granicach -10 i $+10$, mianowicie zaś między -10 i -1 leży jeden pierwiastek a ten naturalnie rzeczywisty; między 0 i $+1$ szukać potrzeba dwóch pierwiastków, których natura jeszcze nieznana, a nareszcie między $+1$ i $+10$ wskazane są trzy pierwiastki z których o jednym pewnym nie jesteśmy że jest rzeczywistym, dwa zaś inne niewiadomo. Badajmy teraz naturę pierwiastków. Według poprzednich przykładów dla dwóch między 0 i $+1$ przypadających, mamy $\frac{f_2(1)}{f_1(1)} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$, $\frac{f_1(0)}{f_2(0)} = \frac{54}{162} = \frac{1}{3}$. Że nie tylko każdy z tych ilorazów ale nawet ich suma jest mniejszą niż $1-0$, zatém należy ścieśnić granice. Nim jednak do tego przystąpimy, szukajmy czyli wielomiany $f_1(x)$ i $f_2(x)$ nie mają wspólnego dzielnika. Otrzymywszy znajdziemy że $x-3$ jest tym dzielnikiem. Ale że 3 nie przypada w granice 0 i 1, nie może zatém być pierwiastkiem równania $f_1(x) = 0$. Aby pokazać że też nie może również być pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, ścieśnijmy granice kładąc $x = 0{,}5$

dla $x =$							
0	+	−	+	+	−	+	−
	0	0	1	0	0	0	0
$0{,}5$	+	−	−	+	−	+	−
	0	0	0	0	1	2	2
$+1-i$	+	−	−	+	+	+	−

Tu mamy $\frac{f'(1)}{f''(1)} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3} = 0{,}33\ldots$ ~~$\frac{f'(0)}{f''}$~~ $\frac{f'(0{,}5)}{f''(0{,}5)} = \frac{125}{450} = \frac{5}{18} = 0{,}277\ldots$

Ponieważ suma tych ilorazów $0{,}611\ldots > 1-0{,}5$, z pewnością ~~więc~~ wnioskować możemy że dwa te wskazane pierwiastki są urojonemi.

Przystąpmy teraz do trzech pierwiastków wskazanych między 1 i 10, ścieśniając najprzód granice przez położenie $x = 2$, skąd otrzymamy

dla $x =$							
$1+i$	+	+	−	+	+	+	−
	0	0	1	1	1	0	0
2	+	+	+	−	−	+	−
	0	0	0	1	1	2	3
10	+	+	+	+	+	+	+

Granice 2 i 10 ścieśnijmy jeszcze kładąc $x = 3$, skąd otrzymamy szereg znaków ... + + + + 0 0 0

~~na dow~~ jako dowód, według poprzednio zrobionej uwagi, że równanie $f(x) = 0$ ma trzy pierwiastki równe z których każdy $= 3$ i że $(x-3)^3$ jest dzielnikiem tegoż równania.

§ 45. Wykrywszy podanym poprzednio sposobem wszystkie pierwiastki podanego równania, t. j. naznaczywszy każdemu dwie granice pomiędzy którémi przypada, następuje naturalnie obrachowanie

każdego w żądanem lub potrzebnem przybliżeniu. W poprzednich §§ pokazały się różne sposoby nareszcie znalezienia z już znanych, następnych cyfer pierwiastka. Z pomiędzy tych sposobów uważa Fourier za najkorzystniejszy i najdogodniejszy, Newtona z pewną małą zmianą. Jakkolwiek bowiem ten sposób, jak widzieliśmy, jest nader prostym, wszelako w zastosowaniu jego natrafiamy na niektóre trudności, które tu naprzód starać się będziemy usunąć. A naprzód co się tyczy znalezienia pierwszej, w tym sposobie żądanej, wartości przybliżonej pierwiastka, ta trudność przez poprzednie poszukiwanie granic pierwiastków zupełnie może być usuniętą. Ale że Lagrange, jak się pokazało w § 27, okazał że warunek, aby pierwsza wartość była na $\frac{1}{10}$ bliską prawdziwego pierwiastka, nie jest wystarczającym, i że dopiero jeszcze potrzeba innego warunku jeżeli sposób Newtona ma nas ciągle zbliżać do prawdziwej wartości pierwiastka; zachodzi zatem pytanie, jakie to są te warunki? Na to pytanie Fourier następnie odpowiada:

1° Chociaż jest wiadomem że między a i b jeden się tylko pierwiastek znajduje, to przecież te granice mogą jeszcze być za odległe iżby sposobu Newtona zaraz z pewnością użyć można. A chociaż, jak widzieliśmy, można te granice do upodobania ścieśnić, wszelako należy konieczne podać skazówkę po którejbyśmy mogli z pewnością rozpoznać, które granice są dostatecznie bliskiemi.

2° Jakkolwiek byłaby mała odległość dwóch granic pomiędzy któremi szukany pierwiastek przypada, dla zbliżenia się do prawdziwego, zastosować możemy sposób Newtona tylko do jednej z pewnością, lecz do drugiej nie. Należy przeto wskazać tę granicę którą wybrać potrzeba.

3° Otrzymane wartości coraz bliższe prawdziwego pierwiastka, nie są, jak w innych sposobach naprzemian większe i mniejsze, lecz wszystkie albo większe albo mniejsze; dlaczego nie wiemy wiele prawdziwych cyfer otrzymujemy z każdem działaniem, a ta niepewność jest główną niedokładnością Newtonowego sposobu. A lubo się tu można zapewnić o dokładności pewnej którejkolwiek cyfry przez podstawienie, poświęcić atoli musielibyśmy główną zaletę rzeczonego sposobu, mianowicie prędkiego zbliżania się do prawdziwej wartości, tracąc czas na długie a nie użyteczne rachunki. Tę trudność usuwa Fourier przez podanie granic $a, a', a'', a''' \ldots$ i $b, b', b'' \ldots$ takich że jeżeli pierwsze wszystkie są większe niż prawdziwy pierwiastek drugie, przeciwnie wszystkie są mniejsze L; takiemi bowiem razie wspólne cyfry granicznych np. a''' i b''' będą dokładnemi cyframi rachowanego pierwiastka. Dowiedzie się też następnie że liczba dokładnych cyfer otrzymanych z każdem działaniem, rośnie w postępie ilorazowym 2, 4, 8, 16, … z czego się wyprowadzi pewne prawidło, według którego zaraz przed obrachowaniem drugiej granicy, oznaczyć będzie można, jak daleko posunąć należy przybliżenie pierwszej granicy.

L lub naodwrót, jeżeli same te są wszystkie mniejsze, te drugie wszystkie większe niż prawdziwy pierwiastek;

4° Nareszcie urządzić potrzeba cały rachunek tak, iżby się nie nad potrzebę nie rachowało ale jedynie to co jest koniecznem do obrachowania pierwiastka.

§ 46. Rozstrząsnijmyż teraz i zastanówmy bliżej nad temi uwagami, dla podania prawideł postępowania.

Co do 1° Że pomiędzy granicami a i b, zawsze $b > a$, jeden tylko np. α, znajduje się pierwiastek równania $f(x)=0$, przekonamy się następującym sposobem: opuściwszy dwa ostatnie wielomiany $f_1(a), f(a)$ i $f_1(b), f(b)$ i porównawszy pozostałe tych szeregów znaki, zobaczymy z ostatniej skazówki czyli $f_2(x)$ równanie $f_2(x)=0$ ma i wiele pierwiastków w granicach a i b, lub nie ma żadnego. W pierwszym przypadku każdy pierwiastek tego ostatniego równania będzie różnym od pierwiastka α, wyjąwszy, gdyby wielomiany $f(x)$ i $f_2(x)$ miały wspólnego dzielnika np. $\varphi(x)$ i wtedy, zamiast równania $f(x)=0$, rozwiązać potrzeba równanie $\varphi(x)=0$, aby

znaleźć szukany pierwiastek. Jeżeli zaś rzeczone wielomiany nie mają wspólnego dzielnika, należy ścieśnić granice a i b t.j. znaleźć dwie inne a' i b' tak bliskie, że zrównanie $f_2(x)=0$ nie będzie miało między temi granicami żadnego pierwiastka, a wszelako szukany α leżeć będzie między niemi. Tym tedy sposobem można ~~znaleźć~~ [pierwiastek α zamknąć] tak bliskie granice a' i b', że w tych samych granicach ani zrównanie $f_1(x)=0$, ani też zrównanie $f_2(x)=0$ żadnego nie będą miały pierwiastka. Że się tego zbliżenia granic dopięło, pozna się z szeregu skazowników; w tym bowiem przypadku trzy ostatnie skazowniki być powinny 001. Przyszedłszy do takiego ścieśnienia granic, można już z pewnością przystąpić do rachunku przybliżenia. Tak np. ze zrównania $x^5+3x^4+2x^3-3x^2-2x-2=0$, otrzymamy

	$f_5(x)$	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
dla $x=0$	+	+	+	−	−	−
	0	0	0	1	1	1
10	+	+	+	+	+	+

Ponieważ tu trzy ostatnie skazowniki są 111 nie zaś 001, przeto ścieśnić potrzeba granice. Położywszy $x=1$, znajdziemy

dla $x=1$	+	+	+	+	+	−
	0	0	0	0	0	1
10	+	+	+	+	+	+

Teraz już pewni jesteśmy że zrównanie $f(x)=0$ ma tylko jeden pierwiastek między 1 i 10, a zrównania $f_2(x)=0$ i $f_1(x)=0$ żadnego między temiż granicami.

Można też tu bardzo łatwo dowieść, nad czem się jednak nie zatrzymujemy, że ~~[illegible]~~ jeżeli wielomiany szeregu znaków dla $x=a$ mają też same znaki jak im odpowiadające szeregu dla $x=b$, pozostają też znaki niezmienne gdy za x położymy jakąkolwiek pomiędzy a i b przypadającą liczbę. Drugą prawdę można także dowieść że jeżeli dla dwóch podstawień a i b szereg skazowników kończy się na 0, taki skazownika pozostanie niezmienną gdy za x położymy jakąkolwiek między a i b przypadającą liczbę. Pamiętając tylko, że raz zmienione przemiany znaków już więcej nie powracają gdy x od a do b rośnie, czemam dostatecznie pokazały szeregi znaków dla $x=-\infty$ i $x=+\infty$.

§47. Jeżeli granice a i b szukanego pierwiastka tak już do siebie zbliżyliśmy że trzy ostatnie skazowniki są 001, bez wahania przystąpić możemy do rachunku przybliżenia a to następującym sposobem. Ponieważ już naprzód wiemy że szukany pierwiastek jest większy niż a, a mniejszy niż b, połóżmyż więc $x=b-\beta$, gdzie β naturalnie wyraża to co ~~[illegible]~~ od większej granicy odjąć potrzeba, aby otrzymać prawdziwy pierwiastek. Według definicyi pierwiastka, być musi $f(b-\beta)=0$. Lecz według §38, zrównanie $f(x\pm i)=f(x)+if_1(x)+\dots$, mamy też

$$f(b-\beta)=f(b)-\beta f_1(b-\beta\dots b)=0$$

biorąc tylko dwa wyrazy tego rozwinięcia, gdzie $f_1(b-\beta\dots b)$ wyraża ~~[illegible]~~ wartość jaką otrzyma $f_1(x)$ skoro za x położy się wartość przypadającą między $b-\beta$ i b czyli pomiędzy x i b, a którą tu przez $b-\beta\dots b$, lub przez $x\dots b$ oznaczamy. Z powyższego zrównania wypada

$$\beta=\frac{f(b)}{f_1(x\dots b)}$$

a następnie $$x=b-\frac{f(b)}{f_1(x\dots b)}$$

Ale że każda między x i b przypadająca ~~liczba~~ wartość przypada też między a i b, więc wartość na x napisać też można następnie:

$$x = b - \frac{f(b)}{f_1(a \ldots b)}$$

(Zastanawiawszy się teraz nad tém, że $f_1(x)$ [wielomian] tak dla $x = a$ jako téż i dla $x = b$ jest dodatnym, według przypuszczenia, że szereg skazowek kończy się na 001, t. j. że szeregi znaków są dla
$x = a \ldots\ +\ +\ -$
$x = b \ldots\ +\ +\ +$ [0 0]

F nad tém, że,

tudzież F według zrobionej w końcu poprzedzającego §fu uwagi, że tenże wielomian zostaje ciągle dodatnym dla wszystkich między a i b przypadających wartości x, bo ten znak zmienićby się mógł tylko wtedy, gdyby jaka między a i b leżąca wartość uczyniła $f_1(x) = 0$, to zaś być nie może według naszego przypuszczenia; zważywszy dalej, że wszystko co się dopiero powiedziało o znaku wielomianu $f_1(x)$, powiedzieć téż można o znaku wielomianu $f_2(x)$, a zatém że i ten wielomian jest ciągle dodatnym dla wszystkich między a i b leżących wartości x, wniesiemy na zasadzie § 38 że wielomian $f_1(x)$ ciągle rośnie bo wielomian jego pochodny pierwszy t. j. wielomian $f_2(x)$ jest ciągle dodatnym w przestworze a i b. Z tego rozumowania wypada że zmieniając wartość x od a do b, najmniejszą wartością wielomianu $f_1(x)$ będzie $f_1(a)$, a największą $f_1(b)$.

Dokładna wartość pierwiastka x, jest wyrażoną, jak wyżej, przez

$$x = b - \frac{f(b)}{f_1(a \ldots b)}$$

Jeżeli tu za $f_1(a \ldots b)$ położymy $f_1(b)$ gdzie oczywiście $b > a \ldots b$, dzielić będziemy $f(b)$ przez ilość większą niż powinniśmy, iloraz przeto $\frac{f(b)}{f_1(b)}$ wypadnie mniejszy niż być powinien, a następnie odejmiemy od b mniej niż należało, wypadnie przeto [wartość] x większą niż prawdziwy pierwiastek, a wszelako mniejszą niż b. Położywszy $b - \frac{f(b)}{f_1(b)} = b'$, będzie $b' < b$ ale téż $b' >$ niż szukany pierwiastek. Tak tedy z większej granicy b wyprowadziliśmy inną b' która jest bliższą prawdziwego pierwiastka, lecz go jeszcze przewyższa.

Tym samym sposobem użyć téż można mniejszej granicy dla zbliżenia się do prawdziwego pierwiastka. Położywszy bowiem $x = a + \alpha$ gdzie α jest naturalnie tém co brakuje liczbie a do prawdziwego pierwiastka, mamy podobnie jak poprzednio

$$f(a + \alpha) = 0$$

tudzież

$$f(a + \alpha) = f(a) + \alpha f_1(a \ldots a + \alpha) = 0$$

zkąd

$$\alpha = -\frac{f(a)}{f_1(a \ldots a + \alpha)} = -\frac{f(a)}{f_1(a \ldots x)} = -\frac{f(a)}{f_1(a \ldots b)}$$

a następnie

$$x = a - \frac{f(a)}{f_1(a \ldots b)}$$

Na pierwszy rzut oka zdawałoby się że aby otrzymać x potrzeba od mniejszej granicy, która przecie sama jest mniejszą niż x, jeszcze odjąć pewną wielkość, przypomniawszy sobie atoli że [wielomian] $f(a)$ jest odjemny a $f_1(a \ldots b)$ ilość dodatna, wiemy że w istocie iloraz $\frac{f(a)}{f_1(a \ldots b)}$ do a dodanym być musi.

Jeżeli w wartości na x położymy [$f_1(b)$] za $f_1(a \ldots b)$, pamiętając że $f_1(b)$ jest największą wartością ze wszystkich między a i b przypadających wartości $f_1(x)$, uczynimy znowu iloraz $\frac{f(a)}{f_1(b)}$ mniejszym niż być powinien; dodawszy przeto do a mniej niż należało, otrzymamy x t. j. pierwiastek mniejszy niż prawdziwy, wszelako większy niż mniejsza granica a.

Położywszy tu znowu $a - \frac{f(a)}{f_1(b)} = a'$ mieć będziemy nowe granice pomiędzy któremi przypada prawdziwy pierwiastek

$$a' = a - \frac{f(a)}{f_1(b)} \quad i \quad b' = b - \frac{f(b)}{f_1(b)}$$

F ilorazów $\frac{f(a)}{f_1(b)}$ i $\frac{f(b)}{f_1(b)}$, do czego

Γ t. j. dopóki cyfry wartości a' i b' nie zaczną się różnić,

Granice nowe a' i b' są bliższemi prawdziwego pierwiastka ~~a i b~~ niż a i b a obrachowanie ich nie wymaga wielkiej lub trudnej pracy, bo jak widzimy, cały rachunek sprowadza się do obrachowania F $f(a)$, $f(b)$ i $f_1(b)$ ~~[illegible]~~ z poprzedniego ~~ob~~ rachunku do znalezienia granic a i b już są znane. Ponieważ a' i b' są tylko więcej zbliżonemi wartościami, zatém ilorazy rzeczone nie rachuje się w więcej cyfrach jak w tém przybliżeniu potrzeba Γ zachowując zawsze warunek $a' < x < b'$ i w dalszych przybliżeniach

Zatrzymawszy w wartościach tyle cyfer żeby się tylko w ostatniej t.j. najniższej o jedną jedność tego najniższego rzędu różniły, zachowamy tym sposobem warunek że $a' < x < b'$.

Jeżeli teraz na tej samej drodze z granic a' i b' obrachujemy nowe a'' i b'', te znowu będą bliższemi niż poprzedzające a wszelako takie że $a'' < x < b''$. Tym samym sposobem postępując coraz dalej, otrzymywać będziemy za każdém podobném działaniem coraz bliższe granice pomiędzy które jednak prawdziwy pierwiastek ciągle przypadać będzie.

§48. Oznaczmy teraz miarę zbliżenia się do prawdziwej wartości pierwiastka, za każdem znalezieniem nowych granic, albo wyraźniej mówiąc ile najmniej wiele za każdém działaniem ~~otrzymuje się~~ otrzymuje się dokładnych cyfer pierwiastka? Na ten koniec niech i wyraża różnicę granic a i b tak że $b-a=i$, pamiętając zawsze że między granicami a i b zrównanie $f(x)=0$ ma tylko jeden, a zrównania $f_1(x)=0$ i $f_2(x)=0$ żadnego pierwiastka. Niech też i' będzie różnicą nowych granic a' i b' tak że $b'-a'=i'$. Ponieważ $a'=a-\frac{f(a)}{f_1(b)}$ według §fu poprzedzającego zaś $a=b-i$ z teraźniejszego przypuszczenia, zatém

$$a'=b-i-\frac{f(b-i)}{f_1(b)}$$

Ale $f(b-i)=f(b)-if_1(b)+\frac{i^2}{2}f_2(b)-\ldots\ldots$ §38.

przeto
$$a'=b-i-\frac{f(b)-if_1(b)+\frac{i^2}{2}f_2(b-i\ldots b)}{f_1(b)}$$

znacząc znowu przez $f_2(b-i\ldots b)$ wartość wielomianu $f_2(x)$ skoro w nim położymy za x liczbę przypadającą między $b-i$ i b. A że $b-i=a$, możina więc położyć $f_2(a\ldots b)$ za $f_2(b-i\ldots b)$, przez co otrzymamy

$$a'=b-i-\frac{f(b)-if_1(b)+\frac{i^2}{2}f_2(a\ldots b)}{f_1(b)}$$

Lecz z poprzedzającego §fu wiemy że

$$b'=b-\frac{f(b)}{f_1(b)}$$

wziąwszy więc różnicę $b'-a'$, znajdziemy

$$b'-a'=\frac{i^2}{2}\frac{f_2(a\ldots b)}{f_1(b)}$$

t.j.
$$i'=\frac{i^2}{2}\frac{f_2(a\ldots b)}{f_1(b)}= ~~\frac{i^2}{2}\frac{f_2(a\ldots b)}{2f_1(b)}~~ i^2\frac{f_2(a\ldots b)}{2f_1(b)}$$

Ostatnie to zrównanie jest bardzo ważném w rachunku zbliżenia, daje nam bowiem różnicę nowych granic a' i b' przez różnicę granic a i b gdyż współczynnik $\frac{f_2(a\ldots b)}{2f_1(b)}$ ~~[illegible]~~ uważać potrzeba za znany, bo jego licznik jest to wartość wielomianu $f_2(x)$ skoro w nim położymy za x liczbę przypadającą między a i b i mianownik $2f_1(b)$ ~~[illegible]~~ znany jest także.

Z tego zrównania czytamy, że różnica nowych ~~[illegible]~~, równa się kwadratowi różnicy poprzednich granic mnożonemu przez iloraz $\frac{f_2(a\ldots b)}{2f_1(b)}$. Ten iloraz albo raczej przybliżoną jego wartość oznaczywszy przez C,† będzie $i'=Ci^2$. Wartość C, jak później zobaczymy łatwo obrachować można, oraz pokaże się praktycznie użycie przybliżonej wartości Ci^2 w dochodzeniu wiele się otrzymuje dokładnych cyfer, za każdém nowém zbliżeniem się. Tu już bowiem widzimy, że jeżeli różnica granic $b-a$ była cyfrą ~~[illegible]~~ piątego rzędu potrzebie, t.j. jeżeli taż różnica była $(\frac{1}{10})^5$, różnica $b'-a'$ będzie dziesiątego rzędu dziesiętną cyfrą t.j. $(\frac{1}{10})^{10}$.

† ale tak, iżby było $C > \frac{f_2(a\ldots b)}{2f_1(b)}$

Liczba C raz wyznaczona, zatrzymuje wartość swoją w całym ciągu rachunku przybliżenia, a różnice $i, i', i''\ldots$ będą jednościami

bardzo niskich węzłów. A chociaż różnica b'–a' może jeszcze być znaczną, z powodu że granice a' i b' mogą jeszcze być za odległe, to przecięż zbliżanie się ~~za każdém działaniem~~ nie pozostaje na tymże samym stopniu, ale dostarcza za każdém działaniem coraz większą liczbę dokładnych cyfer.

Wszystko co się dotąd powiedziało o zbliżaniu się do prawdziwej wartości pierwiastka, pokazuje się daleko jaśniej na wspomnianej już dawniej konstrukcyi geometryczny, która też także dowodzi, że nie jest obojętną rzeczą wybrać którąkolwiek z dwóch granic a i b do rachunku przybliżenia*) bo nie dwie ale pięć takich granic się znajduje z których każdą do rachunku użyć można.

*) sposobem nadto na,

§ 49. Ponieważ niepodobna iść krok w krok za Furyjerem, żeby nakreślić cały jego sposób przetłomaczyć, zatém odsyłając do wyżej przywiedzionego jego dzieła, śpieszę do końca, bo już i tak dość szeroko się rozpisałem nad tym sposobem, a wszelako pozostaje jeszcze wiele ważnych rzeczy, jak naprzód zaś szczególniej zmniejszenie miary przybliżania się z każdém działaniem do prawdziwego pierwiastka i sposób urządzenia całego rachunku aby tylko takie dziesiętne przedsię brać jakie koniecznie są potrzebnemi, jako też żeby nie rachować niepewnych cyfer pierwiastka. Naprzód więc ~~co~~

Co do 2go. Ponieważ szukając z wiadomych granic a i b nowych a' i b'; mamy wykonać dzielenia $\frac{f(a)}{f_1(a)}$ lub $\frac{f(b)}{f_1(b)}$, a w tych dzieleniach dzielnik $f_1(a)$ lub $f_1(b)$ może mieć i ma w istocie wiele cyfer dziesiętnych, cyfry zaś dalsze ku prawej ręce, t.j. niższe, żadnego nie mają wpływu na pierwsze po lewej stronie cyfry ilorazu, poznać przeto naprzód potrzeba te cyfry aby je dopiero wtedy użyć gdy będą potrzebne. A także znamy skrócony sposób dzielenia, w którym otrzymujemy tylko żądaną liczbę cyfer na iloraz, wszelako nam tu nie o to chodzi, ale raczej o to żeby wszystkich cyfer dzielnika naraz nie używać, lecz z postępem rachunku koniecznie potrzebne przybierać i tym sposobem dowolnie rachunek posunąć, jak również chodzi nam o to, żeby z pewnością rozpoznać można, że napisana na iloraz cyfra jest dokładną. Na ten koniec podał Furyjer sposób dzielenia który on nazwał <u>dzieleniem uszykowaném</u> (: division ordonnée :).

Zasada tego dzielenia jest następująca: bierze się w dzielniku jedną, dwie, trzy, lub więcej pierwszych z lewej strony cyfer nad którymi pociąga się linijkę i które nazywa Furyjer <u>dzielnikiem naznaczonym</u> (: diviseur designé :) i który ma być dzielnikiem w całym ciągu, bo tylko w pewnych przypadkach o jedną cyfrę powiększonym być może. Przez tak naznaczonego dzielnika dzieli się podzielną zwyczajnym sposobem z tą jednak różnicą że każdą częstkową podzielną powstającą z reszty i następnej do niej przypisanej cyfry z całkowitej podzielnej, <u>poprawia</u> się przez odjęcie od niej pewnej liczby <u>poprawką</u> zwanej, skąd się otrzymuje <u>poprawioną częstkową podzielną</u>. Tę ostatnią dzieli się znowu przez naznaczony dzielnik a iloraz pisze się na przeznaczoném miejscu. Przez tak znalezioną cyfrę ilorazu, mnoży się tylko dzielnik naznaczony a iloczyn odejmuje od poprawionej częstkowej podzielnej. Do reszty przypisuje się znowu następna cyfra całkowitej podzielnej, od tego odejmuje się nową poprawkę i otrzymuje następną częstkową podzielną poprawioną którą się znowu dzieli przez naznaczony dzielnik i tak dalej postępuje się według tegoż samego prawidła.

Aby znaleźć skróconą poprawkę, którą odjąć potrzeba od każdej częściowej podzielnej, aby otrzymać poprawioną, ~~stosuje się następującym~~ ~~sposobem~~ postępuje się: wszystkie m cyfer już otrzymanych na iloraz, ~~podpisuje się pod~~ w odwrotnym kierunku pod tylu cyframi dzielnika po naznaczonym dzielniku następującemi, odpowiadające sobie cyfry mnoży się a wypadające iloczyny dodaje; suma tych iloczynów będzie poprawką jaką potrzeba odjąć od częściowej podzielnej.

Tak postępując, należy sprawdzać za każdem częściowem dzieleniem do wiadomości czyli z poprzedniego dzielenia pozostała reszta jest większa albo przynajmniej równą sumie cyfer już otrzymanego ilorazu bez względu na ich miejscową wartość. Jeśli bowiem ten warunek nie jest, ostatnia cyfra ilorazu jest niedokładną a przynajmniej wątpliwą.

Jeśli się wzięto za małą liczbę cyfer do naznaczonego dzielnika, może się wydarzyć przypadek że reszta z pewnego dzielenia wypadnie mniejsza niż suma cyfer ilorazu. W takim razie przybrawszy do ostatniej reszty następną cyfrę podzielnej, postępuje się dalej w rachunku, odejmując od tej ostatniej częściowej podzielnej przynależną poprawkę i dalej się dzieli. Gdyby atoli ta ostatnia poprawka nie mogła być odjętą od rzeczonej częściowej podzielnej, ostatnia cyfra ilorazu byłaby za wielką i zmniejszyć ją potrzeba o 1. Jeśli zaś poprawka może być odjętą, rzeczona cyfra ilorazu jest dobra, żeby jednak dalsze dzielenie uskutecznić można, przybiera się do reszty (po odjęciu poprawki) następującą cyfrę podzielnej, co stanowić będzie nową częściową podzielną. Aby otrzymać na iloraz cyfrę prawdziwą, przybrać potrzeba do naznaczonego dzielnika następną cyfrę, F i przez tego nowego naznaczonego dzielnika dzielić ~~poprawioną~~ nową ~~poprawioną~~ częściową poprawioną podzielną. Z tym nowym dzielnikiem postępuje się już wskazaną na początku drogą aż do końca. F wraz poprawkę odjąć od częściowej podzielnej

Możnaby też i powrócić do pierwszego dzielnika i w całym ciągu działania zmniejszać lub powiększać liczbę cyfer naznaczonego dzielnika, bo tym sposobem powiększyłoby się tylko lub zmniejszyło liczbę poprawek; ściśle jednak i bezpieczniej przy mniejszym możnaby być od błędu postępując w dalszym ciągu przy nowym naznaczonym dzielniku.

Poprawkę o której wyżej mowa, także porachować można nie pisząc nawet szczególnych, jak wspomniano iloczynów; podpisawszy bowiem m cyfer już otrzymanych na iloraz w odwrotnym porządku pod m cyframi dzielnika po naznaczonym następującemi, postępując od prawej do lewej ręki dodaje się same jedności częściowych iloczynów, wracając zaś do prawej ręki, dodaje się same dziesiątki; suma obu tak otrzymanych liczb będzie sumą iloczynów oraz szukaną poprawką. Tak np. gdyby były cyfry dzielnika 876543, cyfry zaś ilorazu 592654 działanie jak wyżej powiedziano odbywa się tak:

$$
\begin{array}{l}
8\quad 7\quad 6\quad 5\quad 4\quad 3 \\
4\quad 5\quad 6\quad 2\quad 9\quad 5 \\
\hline
32+35+36+10+36+15 = 164 \text{ poprawka}
\end{array}
$$

albo krócej . . . .

$$
\begin{array}{rl}
2+5+6+0+6+5 = & 24 \text{ jedności} \\
3+3+3+1+3+1 = & 14 \text{ dziesiątki} \\
\hline
 & 164 \text{ poprawka jak wyżej}
\end{array}
$$

§50. Objaśniwszy szeroko opisałem sposób postępowania w dzieleniu ~~skróconem~~ skróconem, rozumiem wspólnie z pewną ilością przykładów dalsze później pokażę i nauczę jak w każdym przypadku postąpić należy. Dlatego przytaczam tu trzy przykłady, których wypadki z dzielenia każdy sprawdzić może zwyczajnie wziętym dzieleniem.

Przykład 1. Niechby potrzeba podzielić liczbę 3 przez 5·768432986[3]
Weźmy za naznaczony dzielnik trzy pierwsze cyfry t. j. 576, tedy rachunek będzie następny:

```
        3       | 5·768432986 3
     2880       | 0·5200719188 2
     1200                      678
poprawka   40 = 5.8
część. podziel. 1160
           1152 = 2.576   reszta 8 > 5+2, cyfra 2 jest pewną.
             80   8 > 7 ... (skreślone)
poprawka     36 = 2.8+4.5 (skreślone)
            440 -- bo 576 w 44 nie mieści się
poprawka --  23 = 8.0+4.2+3.5
           4170  bo 576 w 417 nie mieści się.
poprawka --  16 = 8.0+4.0+3.2+2.5
           4154
           4032 = 7.576
           1220   122 > 5+2+0+0+7
poprawka    105 = 8.7+4.0+3.0+2.2+9.5
           1115
            576 = 1.576
           5390
poprawka    194 = 8.1+4.7+3.0+2.0+9.2+8.5
           5296
           5184 = 9.576
           1120
poprawka    143 = 8.9+4.1+3.7+2.0+9.0+8.2+6.5
            977
            576 = 1.576
           4010
poprawka     88 = 8.1+4.9+3.1+2.7+9.0+8.0+6.2+3.5
           3922
           3456 = 6.576
           4660
poprawka    150 = 8.6+4.1+3.9+2.1+9.7+8.0+6.0+8.2
           4510
           4032 = 7.576
           4780
poprawka    166 = 8.7+4.6+3.1+2.9+9.1+8.7+6.0+3.0
           4614
           4468 = 8.576
            146
            i t. d.
```

2. Weźmyż ten sam przykład ale za naznaczonego dzielnika weźmy tylko dwie cyfry 57. Rachunek będzie jak następuje:

```
        3     | 5·768432986 3
      285     | 0·5200719
      150
popr.  30 = 6.5
      120
      114 = 2.57
       60 ... reszta 6 < 5+2, przeto cyfra 2 niepewna
popr. .. 52 = 6.2+8.5  możebyś odjęła więc (iloraz) 2 pewny
       80   przybiera się nowa cyfra podzielnej i do naznaczonego dzielnika cyfra 6
popr. .. 36 =                                        F 6.0+8.2+4.5
      440   576 w 44 ... 0
popr.  23 = 8.0+4.2+3.5
     4170   bo 576 w 417 znowu 0
popr.  16 = 8.0+4.0+3.2+2.5
     4154
     4032 = 7.576
     1220
popr.  105 = 8.7+4.0+3.0+2.2+9.5
     1115
      576
     5390 i t. d.
```

bo ~~...~~ rachunek już idzie jak się wyżej pokazało, a co widzimy nawet z częstkowych podzielnych a nawet z poprawek.

Przykład 3. Chcę podzielić 25·6328 przez 9·78654321 65432, weźmy za naznaczonego dzielnika tylko jedną cyfrę 9, tedy działanie następnie wykonamy:

25·6328 | 9·78654321 65432
18 | 2·61918835 20904
76
pop. 14
62
54
83 — 8 = 2+6 więc cyfra 6 dobra.
pop. 58
25 — 9 w 25 mieści się 2 razy, lecz poprawka nie dałaby się odjąć więc bierzemy ~~za~~ 1 zamiast 2
9
162
pop. 67
95
81
148 — $14 < 2+6+1+9$, cyfra 9 niepewna
pop. 117 — może być odjętą, więc cyfra 9 pewna, lecz w dzielniku
310 — przybierą się cyfra 7 do naznaczonego dzielnika i
pop. 116 — i robi się nowa poprawka
194 — 97 w 194, mieści się 2 razy lecz zostałoby 0 od któ-
97 — rego by poprawki odjąć nie można; więc się mieści 1
970
pop. 97
873 — 97 w 873, mieści się 9 razy, ale się zostanie 0 od
776 — którego poprawki odjąć nie można; więc bierze się 8
970
pop. 141
829
776
530
pop. 170
360
291
690
pop. 163
527
485
420 — reszta $42 < 2+6+1+9+1+8+8+3+5$ więc
pop. 198 — cyfra 5 niepewna, lecz gdy poprawka 198
2220 — może być odjęta, więc pewna; przybiera się
pop. 156 — atoli nowa cyfra z podzielnej, jako też następna
2064 — cyfra do naznaczonego dzielnika i robi się
1956 — zaraz nowa poprawka
1080
pop. 179
901 — 978 w 901 mieści się 0
0
9010
pop. 141
8869
8802
670
pop. 195
475
0
4750
pop. 183
4567
3912
655 i t. d.

Rozumiem że te przykłady tak szczegółowo wykonane, stawią każdego w możności wykonać dzielenie skrócone nie tylko na ułomkach dziesiętnych ale też i na liczbach całkowitych, gdzie dzielnik zamyka znaczną liczbę cyfer; przerobienie zaś kilku przykładów na wzór poprzedzających, nauka uczniom się pewności w tém działaniu które z powodu że nie używa wszystkich cyfer dzielnika, jest łatwiejszém a nawet pewniejszém od zwyczajnego skróconego dzielenia.

§51. Przy tej sposobności zwracam tu (?) jeszcze (?) uwagę, że dokładność iż w uskróconem (?) dzieleniu nie używamy od razu ale w miarę potrzeby cyfer dzielnika po naznaczonym dzielniku ku prawej ręce leżących, nastręcza to sposób znalezienia w wielu razach pierwiastków ~~dr~~ równania drugiego stopnia może prędzej niż zwyczajnym sposobem. Niechby np. danem było równanie $x^2+5367x-897=0$, z którego wypada $x=\frac{897}{5367+x}$. Tu potrzeba podzielić 897 przez 5367+x a zatem przez dzielnika który nie zupełnie jest znanym; ponieważ jednak dalsze jego cyfry nieznane dopiero później potrzebne będą do rachowania po prawej (?), więc można wykonać dzielenie byle tylko znalezione na iloraz cyfry zaraz dopisywać do dzielnika. Zobaczmy to działanie biorąc za naznaczonego dzielnika 53.

```
 897      | 5367·167127
 53       | 0·1671227... pierwiastek
 367
pop. 6
 361
 318
 430
pop. 43  = 6.6+7.1
 387
 371
 160
pop. 85  = 6.7+7.6+1.1
 75
 53
 220
pop. 67  = 6.1+7.7+1.6+6.1
 153
 106
 470
pop. 69  = 6.2+7.1+1.7+6.6+7.1
 401
 159
 247
 371
 300
pop. 142
 158   i t. d.
```

O dokładności tego pierwiastka przekonać się można rozwiązując powyższe równanie zwyczajnym sposobem. W dzielniku widzieć można dopisowane cyfry znajdowane na iloraz.

Tym samym sposobem rozwiązałby też można równanie trzeciego stopnia bez (?) z większym zachodem, boby potrzeba do dzielnika dopisować kwadraty ze znalezionych cyfer ilorazu, co pokazuje ~~np.~~ równanie

(margin: bez drugiego wyrazu)

$x^3+578x-17=0$ z którego wypada $x=\frac{17}{578+x^2}$.

§52. Co jeszcze (?) dalszego urządzenia rachunku, iżby tylko to rachować co jest koniecznie potrzebnem, oraz żeby to co już jest porachowanem służyło do następnego rachunku, odnosi się to do podstawień, bez których obejść się nie można. Ktoś mając już podstawienia wartości przybliżonej do prawdziwego pierwiastka np. ~~wartości~~ wartości 3·07, t. j. mając wartości $f(3{\cdot}07)$, $f_1(3{\cdot}07)$, $f_2(3{\cdot}07)$ .... a chcąc znaleźć wartości tychże samych wielomianów dla innej następnej wartości przybliżonej np. 3·072583, źlebyśmy rachowali i tracili dużo czasu, gdybyśmy całą tę wartość podstawili za x w $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ .... bo na zasadzie równania w §38 dowiedzionego $f(x+i)=f(x)+\frac{i}{1}f_1(x)+\frac{i^2}{1.2}f_2(x)+\dots$ widzimy, że ponieważ w tem drugiem podstawieniu będzie $f(x)=f(3{\cdot}07)$ ($x=3{\cdot}07$) zaś $i=0{\cdot}002583$, przeto dość obrachować przybytek $i f_1(x)+\frac{i^2}{1.2}f_2(x)+\dots$ i do wartości już znalezionych w poprzedniem przybliżeniu dodać. To jaśniej się pokaże praktycznie

których szukać będziemy pierwiastka danego równania. Tu tylko dam ogólny pogląd na ten rachunek.

Skoro już mamy z poprzedniego rachunku wiadome (wartości) $f(b), f_1(b), f_2(b), f_3(b) \dots f^n(b)$, a chcemy otrzymać wartości z podstawienia $b+\beta$ za x, dosyć jest napisać wartości $f(b), f_1(b) \dots$ w linii poziomej, potem pod każdą oprócz pierwszej podpisuje się wartość β i mnoży się wszystkie wartości, skąd się otrzyma wartości które nazwijmy wartościami drugiej linii poziomej. Potem podpisuje się β pod wszystkiemi wyrazami drugiej linii oprócz pierwszej i znowu się mnoży jak poprzednio oraz dzieli przez 2, skąd się otrzyma wartości trzeciej poziomej linii. Z temi postępuje się jak z poprzedniemi, mianowicie mnoży się wszystkie, oprócz pierwszej, przez β, a dzieli przez 3. Pod wszystkiemi wypadkami, oprócz pierwszego, pisze się β i znowu mnoży, a wypadki z mnożenia dzieli przez 4 i t. d. Dodawszy pierwsze wyrazy po sobie następujących linij, suma będzie wartością $f(b+\beta)$, suma drugich wyrazów wartością $f_1(b+\beta)$, suma wyrazów trzecich wartością $f_2(b+\beta)$ i t. d. co, jak wyżej powiedziałem, jaśniej się w zastosowaniu pokaże.

§ 53. Pozostaje nareszcie znalezienie miary przybliżenia się za każdém działaniem do prawdziwego pierwiastka o którym już w § 48 mówiliśmy. Tu wyraźniej podaje się sposób znalezienia czyli raczej osądzenia, wiele się znajduje dokładnych cyfer pierwiastka za każdém nowém działaniem.

Jeżeli między granicami a i b, gdzie $b >$ szukany pierwiastek, tedy oznaczywszy przez β to co potrzeba dodać do b, ażeby otrzymać granicę bliższą b', jak z § 47 wiadomo, $\beta = \frac{f(b)}{f_1(b)}$ i $b' = b - \frac{f(b)}{f_1(b)}$ t. j. $b' = b+\beta$. Skoro $b+\beta$ położymy za x w wielomianach $f(x)$, $f_1(x), f_2(x) \dots$, dla znalezienia następnej wartości przybliżonej pierwiastka, albo raczej nowej poprawki β', musimy dzielić $f(b+\beta)$ przez $f_1(b+\beta)$, w ilorazie zaś potrzeba wiedzieć która ostatnia cyfra jest pewną, ażeby następnych niepewnych nie rachować. Chociaż bowiem moglibyśmy drugą granicę obrachować, jak w powołanym §fie wskazano i potém wspólne cyfry obu granicom wziąść za cyfry pewne, to przecież przydłużylibyśmy sobie robotę i wiele a niepotrzebnie rachowali. Otóż uważając tylko różnicę drugiej od pierwszej granicy, bardzo dużo uprościmy sobie rachunek i sprowadzimy go do najprostszego jaki tu być może.

Już w powołanym tu §fie pokazało się, że mając jedną z granic, można drugą znaleźć bezpośrednio. Niech że więc dwie pierwsze granice będą a i b tak do siebie zbliżone, że szereg ich równych kończy się na 0001. Uważyć ~~najprzód~~ potém potrzeba która z granic położona w $f_1(x)$ i $f_2(x)$ za x nadaje dwom tym wielomianom tenże sam znak. Taką granicę nazwiemy wyższą i oznaczymy ją przez β, drugą zaś niższą oznaczymy przez α. Jeżeli nowe granice oznaczymy przez β' i α', tedy, co dopiero wyżej widzieliśmy

$$\beta' = \beta - \frac{f(\beta)}{f_1(\beta)} \qquad \alpha' = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f_1(\beta)}$$

Przedowodzi że w granicach a i b równanie $f(x)=0$ ma tylko jeden, z równania zaś $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$ i $f_3(x)=0$ żadnego pierwiastka. Gdyby zaś warunki nie były, należy ścieśniać granice i dopóty to czynić, aż ostatnie skrócone będą 0001.

Oznaczywszy oprócz tego, jak w §48 przez i różnicę granic β i α, zaś przez i' różnicę granic β' i α', t. j. położywszy $\beta-\alpha=i$ a $\beta'-\alpha'=i'$, znaleźliśmy tamże zależność tych dwóch różnic zawartą w wyrażeniu $i'=i^2\frac{f_2(\alpha\ldots\beta)}{2f_1(\beta)}$ gdzie wyrażenie $f_2(\alpha\ldots\beta)$ jest nam znane, i jeżeli i jest bardzo małe, i' będzie nieporównanie mniejszem. Aczkolwiekby i było nieskończenie małem, to przecież stosunek $\frac{i'}{i^2}=\frac{f_2(\alpha\ldots\beta)}{2f_1(\beta)}$ jest skończonym i można go zawsze wyznaczyć. Ogólne jego wyrażenie jest $\frac{f_2(x)}{2f_1(x)}$. Lubo tego stosunku zupełnie dokładnie wyznaczyć niemożna, bo zależy od nieznanej x, to przecież wyrażenie $\frac{f_2(\alpha\ldots\beta)}{2f_1(\beta)}$ podaje bardzo łatwy sposób poznania pomiędzy jakie granice przypada. Jakoż, ponieważ przyjęliśmy że równanie $f_2(x)=0$ w granicach β i α niema żadnego pierwiastku, zatem wielomian $f_2(x)$ w przestworze od α do β ciągle rośnąć lub maleć będzie. Toż samo rozumieć należy o wielomianie $f_1(x)$. Oznaczywszy przeto większą z wartości $f_2(\alpha)$ i $f_2(\beta)$ przez $f_2(B)$ bez względu na znaki, zaś przez $f_1(a)$ mniejszą z wartości $f_1(\alpha)$ i $f_1(\beta)$ niemające również względu na znaki, iloraz $\frac{f_2(B)}{2f_1(a)}$ będzie koniecznie większym niż $\frac{f_2(\alpha\ldots\beta)}{2f_1(\beta)}$ a w ogólności większym niż $\frac{f_2(x)}{2f_1(x)}$ bo przypadać musi między α i β. Iloraz ten jest to owa granica, którąśmy F

F w §48 przez C oznaczyli

Wyprowadziwszy przeto z α i β gdzie $\beta-\alpha=i$, bardziej zbliżoną wartość $\beta'=\beta-\frac{f(\beta)}{f_1(\beta)}$, dodaje się do niej wartość $-i^2\frac{f_2(B)}{2f_1(a)}$ t. j. dodaje się ilość większą, bez względu na znak, niż jest różnica i' dwóch granic α' i β'; z tego też powodu pewnymi jesteśmy że szukany pierwiastek zawartym jest między $\beta-\frac{f(\beta)}{f_1(\beta)}$ i $\beta-\frac{f(\beta)}{f_1(\beta)}-i^2\frac{f_2(B)}{2f_1(a)}$.

§54. Po tych uwagach przystępmy do dokładnego oznaczenia, wiele w każdém przybliżeniu otrzymuje się dokładnych cyfer.

Gdyby iloraz $\frac{f_2(B)}{2f_1(a)}$ był równy 1, nowe granice pomiędzy które pierwiastek przypada nie różniłyby się tylko o kwadrat różnicy poprzednich granic t. j. o jedną jedność rzędu $2n$ czyli $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n}$. Jeżeli jednak postąpimy tak że zamiast pierwszej znaczącej cyfry ilorazu $\frac{f_2(B)}{2f_1(a)}$ weźmiemy jedność bezpośrednio wyższego rzędu, to znaczy: jeżeli np. $\frac{f_2(B)}{2f_1(a)}=0{,}0005$ zamiast tego weźmiemy 0,001, albo zamiast $\frac{f_2(B)}{2f_1(a)}=378$ weźmiemy 1000; weźmiemy tym sposobem rzeczony iloraz większy niż jest rzeczywiście, tedy te dwie granice tém więcej do siebie zbliżemy pomiędzy które koniecznie prawdziwy pierwiastek przypadać będzie. Oznaczywszy tę ostatnią jedność przez $\left(\frac{1}{10}\right)^k$, będzie naturalnie $\left(\frac{1}{10}\right)^k>\frac{f_2(B)}{2f_1(a)}$. Wykładnik k może być dodatnym lub odjemnym. Ponieważ $i=\left(\frac{1}{10}\right)^n$ t. j. równa się różnicy granic α i β, więc wyraz $i^2\frac{f_2(B)}{2f_1(a)}$ będzie mniejszy niż $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^k=\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$. Wykonywając przeto dzielenie $f(\beta)$ przez $f_1(\beta)$ i zatrzymując się w ilorazie na cyfrze rzędu $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$, pewnymi być możemy że błąd wypadku jest mniejszym niż jedność dziesiętna rzędu $2n+k$.

Geometryczne wykreślenie pokazuje, iż aby się ciągle zbliżać do prawdziwej wartości pierwiastku, należy zawsze brać raczej wyższą niż niższą granicę; dlatego to zaniedbując przy powyższém dzieleniu w ilorazie wszystkie cyfry jakiebyśmy otrzymali po cyfrze rzędu $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$, w miejsce zaniedbanych, należy ostatnią cyfrę t. j. cyfrę rzędu $2n+k$, powiększyć o 1 tegoż rzędu i dopiero ten wypadek dodać do β rozumie się algebraicznie, a tym sposobem otrzymamy nową granicę β' bliższą prawdziwego pierwiastku niż granica β.

Ponieważ dodając do ilorazu jedność rzędu $2n+k$, dodajemy do wartości $\beta-\frac{f(\beta)}{f_1(\beta)}$ ilość która nie przewyższa, ani nawet może przewyższyć $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$, nie mogącą przewyższyć i różnicy dwóch nowych granic $-i^2\frac{f_2(\alpha\ldots\beta)}{2f_1(\alpha\ldots\beta)}$. Pow-

Nowa przeto granica tém bardziej mniej się będzie różnić od prawdziwego pierwiastka niż jedność $(2n+k)^{tego}$ rzędu. Ta granica atoli może wypaść większą lub mniejszą niż pierwiastek. To się pozna położywszy w $f(x)$ tę znalezioną granicę za x. Jeżeli bowiem wypadek będzie odjemny, granica będzie mniejszą, w przeciwnym razie większą niż pierwiastek. W pierwszym przypadku potrzeba w β' ostatnią cyfrę powiększyć o 1 a w drugim zmniejszyć aby otrzymać drugą granicę. Tym sposobem otrzymamy dwie liczby α' i β' różniące się tylko o jedną jedność $(2n+k)^{tego}$ rzędu pomiędzy które przypada pierwiastek. Potrzebując dalej przybliżenia, postąpimy z granicami α' i β' jak z granicami α i β. Jeżeli te ostatnie granice różniły się tylko o jedną jedność n^{tego} rzędu, t. j. o $\left(\frac{1}{10}\right)^n$, po pierwszém działaniu otrzymamy $2n+k$, po drugiém $4n+3k$, po trzeciém $8n+7k$, i t. d. pewnych cyfer. Wszelako regularne zbliżanie się do prawdziwego pierwiastka, zaczyna się dopiero wtedy gdy $2n+k > n$, czyli gdy $n > -k$, coby mogło nie nastąpić gdyby n albo k było odjemném; dlatego potrzeba się wprzód zapewnić czyli rzeczony warunek jest dopełnionym lub nie. W ostatnim razie należy jeszcze więcej ścieśnić granice aż się pokaże że przynajmniej ich różnica jest taka że $n = 1 - k$.

§ 55. Wyłożone i dowiedzione w poprzedzających §§fach prawidła zastosujemy nareszcie do przykładu, szukając pierwiastków równania $x^3 - 5x - 7 = 0$, które już w § 36 rozwiązaliśmy, będziemy więc mieć pomocą potwierdzenie znalezionych tam pierwiastków. Co się tyczy granic pierwiastków i wyższe takowych szukać mamy, z tego czego się nauczyliśmy w § 42, takowe znajdziemy, iż w granicach -10 i -1 leżą dwa a jeden pierwiastek między 1 i 10, a ten rzeczywisty. Według prawidła w § 43 podanego przekonamy się bez trudności, że dwa pierwsze pierwiastki są urojone i z tego powodu rachować ich nie potrzebujemy. Aby obrachować pierwiastek rzeczywisty, potrzeba najprzód ścieśnić granice 1 i 10 kładąc $x = 5$, skąd się pokaże że szukany pierwiastek leży między 1 i 5. Położywszy dalej $x = 2$ i $x = 3$, przekonamy się że teraz pierwiastek leży między temi dwiema ostatniemi liczbami; znajdziemy bowiem dla

$$x = 2 \text{ ---- } \quad + \quad + \quad + \quad -$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$
$$x = 3 \text{ ---- } \quad + \quad + \quad + \quad +$$

Szereg znaków pokazuje iżby już można przystąpić do rachunku przybliżenia. Gdy atoli według poprzedzającego §fu jest $\frac{f_2(\beta)}{2 f_1(\alpha)} = \frac{f_2(3)}{2 f_1(2)} = \frac{18}{2.7} = 1 \ldots$ skąd $k = -1$, bo $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10$, różnica zaś granic $3 - 2 = 1 = \left(\frac{1}{10}\right)^0$, dlaczego $n = 0$, i warunek $n \geqq 1 - k$ nie jest dopełnionym, należy przeto jeszcze więcej ścieśnić granice. Postępując poprzednio wskazaną drogą, skoro położymy $x = 2{\cdot}7$ i $x = 2{\cdot}8$, znajdziemy wprawdzie takie same szeregi znaków jak wyżej, ale przy tém otrzymamy

$$f(2{\cdot}7) = -0{\cdot}817, \; f_1(2{\cdot}7) = 16{\cdot}87, \; f_2(2{\cdot}7) = 16{\cdot}2, \; f_3(2{\cdot}7) = 6$$

zaś

$$f(2{\cdot}8) = +0{\cdot}952, \; f_1(2{\cdot}8) = 18{\cdot}52, \; f_2(2{\cdot}8) = 16{\cdot}8, \; f_3(2{\cdot}8) = 6$$

skąd $2{\cdot}8 - 2{\cdot}7 = 0{\cdot}1 = \left(\frac{1}{10}\right)^1$, przeto $n = 1$; potém $\frac{f_2(\beta)}{2 f_1(\alpha)} = \frac{16{\cdot}8}{2.16{\cdot}87} = 0{\cdot}5$ blisko, jednostka przeto bezpośrednio wyższego rzędu jest $1 = \left(\frac{1}{10}\right)^0$ i dlatego $k = 0$ a warunek $n \geqq 1 - k$ jest dopełnionym i rachunek przybliżenia śmiało

rozpocząć można.

Położywszy $\alpha=2{\cdot}7$ a $\beta=2{\cdot}8$, ponieważ $\frac{f(\beta)}{f_1(\beta)}=\frac{0{\cdot}952}{18{\cdot}52}=0{\cdot}05$, gdyż tylko dwie cyfry ilorazu są pewne z powodu że $2n+k=2$, przeto powiększywszy ostatnią cyfrę ilorazu o 1, będzie $\beta-\frac{f(\beta)}{f_1(\beta)}=2{\cdot}8-0{\cdot}06=2{\cdot}74=\beta'$. Tym sposobem otrzymaliśmy bliższą granicę prawdziwego pierwiastka niż każda z poprzedzających, lecz jeszcze nie wiemy czyli ona jest większą lub mniejszą niż tenże pierwiastek. Chcąc to wiedzieć, potrzeba tę nową granicę położyć za x w $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ ~ Ponieważ według §38 jest

$$f(2{\cdot}74)=f(2{\cdot}7+0{\cdot}04)=f(2{\cdot}7)+0{\cdot}04f_1(2{\cdot}7)+\frac{(0{\cdot}04)^2}{1.2}f_2(2{\cdot}7)+\frac{(0{\cdot}04)^3}{1.2.3}f_3(2{\cdot}7)$$

działając przeto jak to w §42 powiedziano, rachunek będzie następujący:

$f(2{\cdot}7)$	$f_1(2{\cdot}7)$	$f_2(2{\cdot}7)$	$f_3(2{\cdot}7)$
−0·817	16·87	16·2	6
	0·04	0·04	0·04
	0·6748	0·648	0·24
		0·04	0·04
		2) 0·02592	0·0096
		0·01296	0·0048
			0·04
			3) 0·000192
			0·000064

−0·817	16·87	16·2	6
+0·6748	0·648	0·24	
+0·01296	0·0048		
+0·000064			
$f(2{\cdot}74)=-0{\cdot}129176$,	$f_1(2{\cdot}74)=17{\cdot}5228$,	$f_2(2{\cdot}74)=16{\cdot}44$	$f_3(2{\cdot}74)=6$

Ponieważ $f(2{\cdot}74)$ wypadło odjemne, więc się pokazuje że wartość 2·74 jest mniejszą niż pierwiastek szukany, ale jednak takiż że cyfra 4 jest pewną. Powiększywszy tę ostatnią cyfrę o 1, otrzymamy granicę wyższą 2·75, gdy tymczasem 2·74 będzie granicą niższą. Nowe przeto granice bliższe pierwiastka niż poprzedzające są: $\alpha'=2{\cdot}74$, $\beta'=2{\cdot}75$ pomiędzy które prawdziwy pierwiastek przypada.

Dla znalezienia następnych bliższych granic, potrzeba w $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ i $f_3(x)$ położyć $x=2{\cdot}75$, co znowu według powyższego rachunku wykonamy bardzo łatwo, bo $f(2{\cdot}75)=f(2{\cdot}74+0{\cdot}01)$, przeto

−0·129176	17·5228	16·44	6
	0·01	0·01	0·01
	0·175228	0·1644	0·06
		0·01	0·01
		2) 0·001644	0·0006
		0·000822	0·0003
			0·01
			3) 0·000003
			0·000001

−0·129176	17·5228	16·44	6
+ 175228	1644	6	
+ 822	3		
+ 1			
$f(2{\cdot}75)=+0{\cdot}046875$,	$f_1(2{\cdot}75)=17{\cdot}6875$,	$f_2(2{\cdot}75)=16{\cdot}50$,	$f_3(2{\cdot}75)=6$

Ponieważ teraz mamy $\beta'-\alpha'=2{\cdot}75-2{\cdot}74=0{\cdot}01=(\frac{1}{10})^2$, więc $n=2$, potém $\frac{f_2(\beta)}{2f_1(\alpha)}=\frac{16{\cdot}50}{2.17{\cdot}5228}=0{\cdot}4$... blisko, i jedność bezpośrednio wyższa jest $1=(\frac{1}{10})^0$, więc znowu $k=0$; dzieląc więc $f(\beta')$ przez $f_1(\beta')$ według upraszczonego dzielenia, dzielić będziemy aż do otrzymania cyfry porządku $2n+k=4$. Tak tedy będzie $\frac{f(\beta')}{f_1(\beta')}=\frac{0{\cdot}046875}{17{\cdot}6875}=0{\cdot}0026$, a powiększywszy ostatnią cyfrę ilorazu o 1 i odjąwszy od β', będzie $\beta''=\beta'-\frac{f(\beta')}{f_1(\beta')}=2{\cdot}75-0{\cdot}0027=2{\cdot}7473$ granica znowu bliższa pierwiastka niż poprzedzające. Czyli ta granica jest większą lub mniejszą niż prawdziwy pierwiastek, przekonamy się położywszy ją za x w $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ i $f_3(x)$. A ponieważ $f(2{\cdot}7473)=f(2{\cdot}74+0{\cdot}0073)$, więc na tej samej drodze jak wyżej będzie

$f(2{,}74)$	$f_1(2{,}74)$	$f_2(2{,}74)$	$f_3(2{,}74)$
$-0{,}129176$	17,5228	16,44	6
	0,0073	0,0073	0,0073
	1226596	115082	
	525684	4932	0,0438
	0,12791644	0,120012	0,0438
		0,0073	0,0073
		840084	3066
		360036	1314
		2) 0,000876087 6	0,00031974
		0,0004380438	0,00015987
			0,0073
			111909
			47961
			3) 0,000001167051
			0,000000389017

$-0{,}129176$
$+\ 12791644$
$\ \ 4380438$
$\ \ 389017$

17,5228
120012
15987

$f(2{,}7473) = -0{,}0008211 27183$, $f_1(2{,}7473) = 17{,}64297187$

$f_2(2{,}7473) \overset{16{,}44}{\underset{438}{=}} 16{,}4838$, $f_3(2{,}7473) = 6$

Znaleziona przeto nowa granica 2,7473 jest mniejsza niż pierwiastek, a powiększywszy jej ostatnią cyfrę o 1 otrzymamy granicę większą, tak że teraz będzie $\alpha'' = 2{,}7473$ a $\beta'' = 2{,}7474$.

Dla dalszego rachunku przybliżenia, potrzeba β'' położyć za x w $f(x)$, $f_1(x)$ . . . , skąd podobnym poprzednim sposobem otrzymamy

$f(2{,}7474) = 0{,}000943\overset{2}{\cancel{7}}524 24$, $f_1(2{,}7474) = 17{,}64462028$

$f_2(2{,}7474) = 16{,}4844$, $f_3(2{,}7474) = 6$.

Teraz potrzeba dzielić $f(\beta'')$ przez $f_1(\beta'')$, ale zobaczmy wprzód wiele cyfr ilorazu się otrzymamy pewnych. Tu jest $\frac{f_2(\beta)}{2f_1(\alpha)} = \frac{16{,}4844}{2.17{,}64297187} = 0{,}4\ldots$ więc $k = 0$

$\beta'' - \alpha'' = 2{,}7474 - 2{,}7473 = 0{,}0001 = \left(\frac{1}{10}\right)^4$ przeto $n = \overset{4}{\cancel{2}}$ a $2n + k = \cancel{4}8$. Wykonywając zatem rzeczone dzielenie wstrzymać się należy na ósmej cyfrze dziesiętnej ilorazu. Jest więc $\frac{f(\beta'')}{f_1(\beta'')} = 0{,}00005345$, a powiększywszy ostatnią cyfrę o 1 będzie $\beta''' = \beta'' - \frac{f(\beta'')}{f_1(\beta'')} = 2{,}7474 - 0{,}00005346 = 2{,}74734654$.

Tę nową granicę jako bliższą pierwiastka położywszy za x w $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ dla przekonania się czyli jest większą lub ~~czy~~ mniejszą niż pierwiastek, zawsze tąż samą co wyżej drogą znajdziemy,

$f(2{,}74734654) = -0{,}00000000542034806 5641736$

$f_1(2{,}74734654) = 17{,}6437390325499148$

$f_2(2{,}74734654) = 16{,}48407924$

$f_3(2{,}74734654) = 6$

Jest więc znaleziona granica mniejsza niż pierwiastek a zatem wyższa przeto granica będzie 2,74734655. Szukany zatem pierwiastek leży między 2,74734654 i 2,74734655.

Dla dalszego zbliżenia potrzeba znowu tę ostatnią granicę wyższą położyć za x w $f(x)$, $f_1(x)$ . . . . bacząc że $f(2{,}74734655) = f(2{,}74734654 + 0{,}00000001)$ znajdziemy też $f(2{,}74734655) = 0{,}0000001710170430840 61375$

$f_1(2{,}74734655) = 17{,}6437391973907075$

$f_2(2{,}74734655) = 16{,}48407930$

$f_3(2{,}74734655) = 6$

Teraz mamy $\beta''' - \alpha''' = 2{,}74734655 - 2{,}74734654 = 0{,}00000001 = \left(\frac{1}{10}\right)^8$ więc $n = 8$ a K znaleźlibyśmy znowu 0, przeto w ilorazie $\frac{f(\beta''')}{f_1(\beta''')}$ wstrzymamy się

wstrzymamy się dopiero na $(2n+k)^{ty}$ t. j. na 16stej cyfrze która jeszcze bę-dzie pewną. Znajdziemy bowiem $\frac{f(\beta''')}{f_1(\beta''')} = 0{,}0000000096927324$

skąd $\beta'''' = \beta''' - \frac{f(\beta''')}{f_1(\beta''')} = 2{,}74734655 - 0{,}0000000096927325$

$= 2{,}7473465403072675$

i t. d.

Za drugi przykład weźmy równanie $x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$ któ-rego ~~pierwiastki~~ jeden pierwiastek, jak w § 43 wykryliśmy, leży między 4 i 5. Szukajmy tego pierwiastka. Ścieśniając dalej granice, dojdziemy do uzyskania dwóch granic 4'3 i 4'4 pomiędzy którymi pierwiastek leży. A kiedy już dla gra-nic 4 i 5 pierwszy warunek jest 000001 i zdawałoby się że rachunek przybliże-nia z wszelką pewnością rozpocząć można, a jednak ~~do~~ probując warunku $n > 1-k$, znajdziemy że ten nie jest jeszcze dopełnionym, bo w przypadku $k = -1$ a $n = 1$; musimy przeto jeszcze dalej granice ścieśnić. Przyszedłszy do dwóch granic 4'32 i 4'33, gdzie będzie $n = 2$ zaś $k = -1$ tak że $n = 1-k$ i warunek już dopełniony, zaczynamy, według podanych poprzednio prawideł, rachu-nek następnie. Z podstawienia granic mamy:

$f(4{,}32) = -1{,}97320263685$ $\qquad$ $f(4{,}33) = +0{,}1030761093$

$f_1(4{,}32) = 205{,}~~5046~~07428280$ $\qquad$ $f_1(4{,}33) = 210{,}19261206~~8~~5$

$f_2(4{,}32) = 508{,}504960$ $\qquad$ $f_2(4{,}33) = 515{,}174340$

$f_3(4{,}32) = 664{,}7640$ $\qquad$ $f_3(4{,}33) = 669{,}174~~034~~$

$f_4(4{,}32) = 446{,}40$ $\qquad$ $f_4(4{,}33) = 447{,}60$

$f_5(4{,}32) = 120$ $\qquad$ $f_5(4{,}33) = 120$

Ponieważ $\beta - \alpha = 4{,}33 - 4{,}32 = 0{,}01 = \left(\frac{1}{10}\right)^2$ więc $n = 2$; że zaś $\frac{f_2(\beta)}{2 f_1(\alpha)} = \frac{515{,}17\ldots}{2.205{,}07\ldots}$ $= 1$, ~~przeto~~ więc $k = -1$, iloraz przeto $\frac{f(\beta)}{f_1(\beta)}$ rachować będziemy w $2n+k = 4-1 = 3$ cyfrach dziesiętnych. Znajdziemy zatem $\frac{f(\beta)}{f_1(\beta)} = 0{,}000$, a powiększywszy ostatnią cyfrę o 1, będzie $\beta' = 4{,}33 - 0{,}001 = 4{,}329$ granica bliższa pierwiastka niż poprzedzająca. Położywszy ją za x w $f(x), f_1(x) \ldots$ znajdziemy

$f(4{,}329) = -0{,}10685~~8\ldots~~9027090351$

$f_1(4{,}329) = 209{,}6777~~0\ldots~~7222~~4\ldots~~2405$

$f_2(4{,}329) = 514{,}50538978~~\ldots~~$

$f_3(4{,}329) = 668{,}72646~~\ldots~~$

$f_4(4{,}329) = 447{,}48~~\ldots~~$

$f_5(4{,}329) = 120$

co dowodzi że znaleziona granica jest mniejszą niż pierwiastek; będzie ona więc granicą niższą czyli α' a wyższą $\beta' = 4{,}330$.

Ponieważ z powyższego jest $f(4{,}330) = +0{,}1030761093$, a $f_1(4{,}330) = 210{,}19261206~~8~~5$ różnica zaś ostatnich granic $\beta' - \alpha' = 0{,}001 = \left(\frac{1}{10}\right)^3$, więc $n = 3$ a $k = -1$ jak wprzód więc teraźniejszy iloraz rachować będziemy w $2n+k = 6-1 = 5$ cyfrach dziesię-tnych. Ten iloraz otrzymamy $\frac{f(\beta')}{f_1(\beta')} = 0{,}00049$ a następnie $\beta'' = 4{,}330 - 0{,}00050 = 4{,}32950$. Kładąc tę granicę za x, znajdziemy

+ ~~$f(4{,}32950) = -0{,}002013\ldots078125$~~, co dowodzi że jest mniejszą niż pierwiastek, będzie ona więc niższą granicą czyli α'' wyższą zaś $\beta'' = 4{,}32951$. Rachując przybliżenie dalej znajdziemy

‡ ~~$f(4{,}32951) = +0{,}000083774219\ldots$~~

~~$f_1(4{,}32951) = 209{,}7343561\ldots1682400\ldots$~~

Tu mamy $\beta'' - \alpha'' = 4{,}32951 - 4{,}32950 = 0{,}00001 = \left(\frac{1}{10}\right)^5$ przeto $n = 5$, iloraz więc $\frac{f(\beta'')}{f_1(\beta'')}$ rachować będziemy w $2n+k = 10-1 = 9$ cyfrach. Ten iloraz znajdziemy $\frac{f(\beta'')}{f_1(\beta'')} = 0{,}000000~~399~~683$ przeto bliższa granica pierwiastka będzie $4{,}32951 - 0{,}000000~~400~~684 = 4{,}329509~~600~~316$ co jest pierwiastkiem bliższym prawdziwego i dokładnym na 0,000000001. Czyli on jest większym lub mniejszym od prawdziwego, potrzeba by znowu znalezio-ną granicę położyć za x jak wyżej. Tego rachunku nie pociągnę dalej bo rozumiem że z tego co się dotąd powiedziało i zrobiło, każ-demu jest jasnym. Powiem tylko że w następnem przybliżeniu otrzy-malibyśmy pierwiastek w 17stu ~~cyfrach~~, a w dalszem w 33 cyfrach i t. d.

Kończąc na tych dwóch przykładach sposób Furyjera nie przestaję zachęcać każdego pracującego w tym przedmiocie do wzięcia do ręki i przeczytania dzieła pana Furyjera wydanego a na początku przywiedzionego, lub też „Vorlesungen über die Differenzialrechnung mit Fourier's Auflösungsmethode der bestimmten Gleichungen verbunden, aus dem Französischen übersetzt von Dr. C. H. Schnuse. Braunschweig 1836.

F. A. L. Cauchy's

‡ $f(4{,}32951) =$ ~~$+0{,}000008\ldots$~~ $+0{,}000014329548189786138975$

$f_1(4{,}32951) =$ ~~$209{,}\ldots$~~ $209{,}69420159486237284005$

+ $f(4{,}32950) = -0{,}0019155181387245940625$

Dodatek I.

Zaraz na wstępie powiedziałem, że wszelkie usiłowania Matematyków, roz„wiązania ogólnie zrównań wyższego stopnia nad czwarty, pozostały dotąd bez skutku. Żeby mnie więc nie pomówiono o niewiadomość lub za„pomnienie o pewnych zrównaniach, które choć wyższych, nad czwarty, sto„pni, wszelako rozwiązanemi być mogą, postanowiłem tu w dodatku uzupełnić to co poprzednio z umysłu pominąłem dla znaczniejszego wyborczenia jakieby potrzeba było zrobić.

Znający dobrze rozwiązanie zrównań drugiego stopnia, wiedzą już, iż na ich wzór rozwiązać można każde zrównanie parzystego stopnia mogące być sprowadzonem, bądź to przez uproszczenie bądź też przez jakie„kolwiek przerobienie do zrównania trój wyrazowego i takiego, żeby wy„kładnik ilości nieznanej w drugim, był połową wykładnika tejże ilo„ści w wyrazie pierwszym. Wszystkie takie zrównania zawarte są w ogól„nym wzorze

$$x^{2n}+px^{n}+q=0$$

Położywszy bowiem $x^n=z$, znajdziemy

$$z^2+pz+q=0$$

Każdą z dwóch wartości z z tego tu zrównania znalezionych, poto„żywszy wyżej za z, otrzymamy $x=\sqrt[n]{z}$. Jeżeli n jest liczbą parzy„stą, a z dodatne, otrzyma się z ostatniego wyrażenia 2 rzetelne a $n-2$ urojone pierwiastki. Jeżeli zaś z jest odjemne, tedy wszystkie n pier„wiastki będą urojone. Że każda z wartości z wyda n pierwiastków, więc obie wydadzą $2n$ jak być powinno. W przypadku że n jest liczbą nie„parzystą, wartość $x=\sqrt[n]{z}$ wyda jeden tylko pierwiastek rzetelny tak dla z dodatnego jako i odjemnego, reszta zaś $n-1$ pierwiastków będą uro„jonemi. Obie więc wartości z dostarczą $2n$ wartości x z których znowu 2 będą rzetelnemi a $2n-2$ urojonemi. F

Podobne zrównania mogą być na pozór bardzo zawikłane, lecz po uproszczeniu i uporządkowaniu, można im nadać postać następującą

$$\{a(\alpha x^{2n}+\beta x^{n}+\gamma)^{2p}+b(\alpha x^{2n}+\beta x^{n}+\gamma)^{p}+c\}^{2m}+P\{a(\alpha x^{2n}+\beta x^{n}+\gamma)^{2p}+b(\alpha x^{2n}+\beta x^{n}+\gamma)^{p}+c\}^{m}+Q=0$$

~~Skoro tu bowiem położymy $a(\alpha x^{2n}+\beta x^{n}+\gamma)^{2p}+b(\alpha x^{2n}+\beta x^{n}+\gamma)^{p}+c=\sqrt[m]{z}$ a potem $(\alpha x^{2n}+\beta x^{n}+\gamma)^{p}=v$, otrzymamy~~

~~$$av^2+bv+c-\sqrt[m]{z}=0 \text{ czyli } v^2+\frac{b}{a}v+\frac{c-\sqrt[m]{z}}{a}=0$$~~

~~skąd~~

~~$$v=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c-\sqrt[m]{z}}{a}}$$~~

~~Z każdej z wartości v mieć będziemy $x^{2n}+\frac{\beta}{\alpha}x^{n}+\frac{\gamma-\sqrt[p]{v}}{\alpha}=0$, a kładąc tu $x^n=y$, otrzymamy~~

~~$$y^2+\frac{\beta}{\alpha}y+\frac{\gamma-\sqrt[p]{v}}{\alpha}=0$$~~

~~i t. d.~~

otrzymamy $z^2+Pz+Q=0$

Położywszy dalej $\alpha x^{2n}+\beta x^{n}+\gamma=\sqrt[p]{v}$ i wartość z z ostatniego zrównania, otrzymamy $av^2+bv+c-\sqrt[m]{z}=0$. Następnie w poprzedzającem zrównaniu kładąc $x^n=y$ czyli $x=\sqrt[n]{y}$, będzie $\alpha y^2+\beta y+\gamma-\sqrt[p]{v}=0$, skąd się znajdzie y a nakoniec x. Z czego się pokazuje że podobne zrównania nawet wy„sokich stopni mogą być rozwiązanemi.

F Liczba n może być nietylko całkowitą ale nawet ułamkową, tak np. będzie $n=\frac{3}{5}$ gdy $p=8$ a $q=-9$ tedy zrównanie będzie $x^{\frac{6}{5}}+8x^{\frac{3}{5}}-9=0$ skąd $x^{\frac{3}{5}}=-4\pm\sqrt{16+9}=-4\pm5$; zatem mamy $x^{\frac{3}{5}}=1$ i $x^{\frac{3}{5}}=-9$ czyli $x=1$ tudzież $x=-\sqrt[3]{9^5}=-9\sqrt[3]{81}=-38{,}9407\ldots$

Często na pierwszy rzut oka zdaje się równanie być wyższego stopnia i niemogące być rozwiązanem sposobem tu wskazanym; po uproszczeniu jednak sprowadza się do postaci jak wyżej. Tak np. równanie

$$(x+1)^6-6(x+1)^5+3x(5x^3+15x+8)+261=0$$

po wykonaniu wskazanych działań sprowadza się do postaci

$$x^6-40x^3+256=0$$

z którego $x^3=20\pm12$ a zatem $x^3=32$ i $x^3=8$. Dwa więc rzeczywiste pierwiastki tego równania są: $x=3{,}1748\ldots$ i $x=2$; cztery inne są urojone.

Lecz nie tylko algebraiczne, ale też i równania wykładnicze (pod warunkiem ~~postaci~~ jak wyżej F rozwiązać można. Wszystkie podobne równania zamknąć można w ogólnej postaci następującej

F. mianowicie że się sprowadza się do trzechwyrazowych i wykładnik w drugim jest połową wykładnika w pierwszym wyrazie,

$$a^{2nx}+pa^{nx}+q=0$$

Położywszy bowiem $a^{nx}=z$, znajdziemy $z^2+pz+q=0$, z którego

$$z=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}.$$

Ale $nx\log.a=\log.z$, skąd $x=\frac{\log.z}{n\log.a}$, zatem

$$x=\frac{\log.\left(-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}\right)}{n\log.a}$$

(Z przypomnienia tego, rozwiązania (pod pewnemi warunkami) równań wyższych stopni nad czwarty na pozór czyli raczej za pomocą równań drugiego stopnia, łatwo wnioskować, że też mogą być równania wyższych stopni mogące się sprowadzić do równań trzeciego lub czwartego stopnia, które rozwiązać umiemy, za pomocą jakiegoś przerobienia, i mogące następnie być rozwiązanemi. (Zachodzi przeto pytanie czyli są i jakie to są podobne równania?

Najprostsze tego rodzaju równania mają ogólną postać następującą:

$$a_0x^{nm}+a_1x^{(n-1)m}+a_2x^{(n-2)m}+a_3x^{(n-3)m}+\ldots\ldots+a_{n-2}x^{2m}+a_{n-1}x^m+a_n=0$$

bo położywszy $x^m=z$, znajdziemy

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+a_3z^{n-3}+\ldots\ldots+a_{n-2}z^2+a_{n-1}z+a_n=0$$

A jeśli $n=2, 3, 4$, t.j. nie przewyższa czwartego stopnia, tedy rozwiązawszy to ostatnie równanie, t.j. znalazłszy wartości z, znajdziemy też wszystkie wartości x, bo $x=\sqrt[m]{z}$.

Np. równanie np. $x^8-4x^6-13x^4+64x^2-48=0$ położywszy $x^2=z$, otrzymamy $z^4-4z^3-13z^2+64z-48=0$ którego pierwiastki znajdziemy: $z_1=1$, $z_2=3$, $z_3=4$, $z_4=-4$. Ale $x=\pm\sqrt{z}$, pierwiastki zatem założonego równania będą: $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{3}$, $x_{5,6}=\pm2$, $x_{7,8}=\pm2\sqrt{-1}$. Nie zatrzymując się nad tak łatwym przypadkiem przestaję na tym jedynym przykładzie.

Pomiędzy równaniami mogącemi się zniżyć do stopnia drugiego, trzeciego lub czwartego, a zatem być rozwiązanemi ogólnie, najznakomitsze są tak nazwane odwrotne (aequationes reciprocae). Nazwa ich stąd pochodzi że jedna połowa ich pierwiastków jest odwrotną pierwiastków drugiej połowy; albo wyraźniej mówiąc, jeżeli podobne równanie ma pierwiastki $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ma też takie i pierwiastki $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ t.j. ostatnie są odwrotnemi pierwszych tak, że jeżeli pierwsze są liczbami całkowitemi, w drugich stają się mianownikami ułamków których licznikiem jest 1; jeżeli zaś pierwsze są ułamkami, w drugich też ułamki będą odwrócone, t.j. na miejscu liczników będą mianowniki i przeciwnie.

Rozpoznać na pierwszy rzut oka takie zrównania jest bardzo łatwo, albowiem współczynniki ich wyrazów jednakowo od pierwszego i ostatniego odległych są sobie równe jako też i współczynniki dwóch wyrazów skrajnych, znaki jednak odpowiednich wyrazów mogą być też same lub różne. Ogólną więc postać takich zrównań można podać w następującem

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\ldots\ldots\pm a_3x^3\pm a_2x^2\pm a_1x\pm 1=0$$

Przypuśćmy że α jest pierwiastkiem tego zrównania, będzie

$$\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+a_3\alpha^{n-3}+\ldots\ldots\pm a_3\alpha^3\pm a_2\alpha^2\pm a_1\alpha\pm 1=0$$

Podzieliwszy całe zrównanie przez $\pm\alpha^n$ otrzymamy, piszące wyrazy w odwrotnym porządku,

$$\frac{1}{\alpha^n}+a_1\frac{1}{\alpha^{n-1}}+a_2\frac{1}{\alpha^{n-2}}+a_3\frac{1}{\alpha^{n-3}}+\ldots\ldots\pm a_3\frac{1}{\alpha^3}\pm a_2\frac{1}{\alpha^2}\pm a_1\frac{1}{\alpha}\pm 1=0$$

na dowód że $\frac{1}{\alpha}$ jest też pierwiastkiem pierwszego zrównania, bo ten sam wypadek otrzymamy kładąc tamże $x=\frac{1}{\alpha}$

Ta własność odwrotnych zrównań stopni parzystych, podaje nam sposób zniżenia ich do stopnia o połowę niższego, co następnie okażę. Zatrzymawszy tylko wyższe znaki w zrównaniu ogólnem, weźmy zrównanie parzystego stopnia

$$x^{2n}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+a_3x^{2n-3}+\ldots+a_nx^n+\ldots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+1=0$$

Podzieliwszy całe zrównanie przez x^n a potem dodawszy wyrazy parami jednakowo od pierwszego i ostatniego odległe jako równe i same skrajne, otrzymamy:

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+a_1\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+a_2\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+a_3\left(x^{n-3}+\frac{1}{x^{n-3}}\right)+\ldots+a_n=0$$

Zobaczmy teraz czyli zamiast dwumianów w nawiasach niewiadoma będzie wartości takich, żeby to ostatnie zrównanie przyjęło postać zwyczajnego zrównania algebraicznego.

Położywszy $x+\frac{1}{x}=z$, ponieważ $\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)z=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)$

stąd $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)z-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)$

Kładąc tu $n=1,2,3,4\ldots\ldots$ otrzymamy

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)z-\left(x^0+\frac{1}{x^0}\right)=z^2-2$$
$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)z-\left(x+\frac{1}{x}\right)=z^3-2z-z=z^3-3z$$
$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)z-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=z^4-4z^2+2$$
$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)z-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=z^5-5z^3+5z$$

i t. d.

Widzimy więc że niezmiernie łatwo jest wyrazić każdy z powyższych dwumianów przez z w postaci liczby całkowitej. Ależ ze zrównania $x+\frac{1}{x}=z$ wypada $x^2-zx+1=0$ stąd $x=\frac{1}{2}z\pm\sqrt{\frac{1}{4}z^2-1}=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4}}{2}$, więc położywszy za rzeczone dwumiany wartości w z, jeśli zrównanie na z wypadnie niewyższego stopnia niż czwarty, znajdziemy wszystkie pierwiastki x, kładąc w ostatnich wartościach każdą z otrzymanych wartości z. Że te wartości na x czyli pierwiastki pierwotnego zrównania, będą parami względem siebie odwrotnemi, pokazuje się z wartości x wyżej otrzymanych. Bo $x_1=\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}$, $x_2=\frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2}$ a mnożąc w drugiej wartości licznika i mianownika przez $z+\sqrt{z^2-4}$ i upraszczając, znajdziemy $x_2=\frac{2}{z+\sqrt{z^2-4}}$ t. j. wartość odwrotną x_1.

$\Gamma\quad x^8-4x^7-10x^6+24x^5+23x^4+24x^3-10x^2-4x+1=0$

$F\quad \left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-4\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+24\left(x+\frac{1}{x}\right)+23=0$

Niechby danem było równanie

Γ ~~$256x^8-1024x^7-2560x^6+6144x^5+5888x^4+6144x^3-2560x^2-1024x+256=0$~~

które jak widzimy jest odwrotnem i wyrazy jednakowo od skrajnych odległe mają też same znaki. Podzieliwszy całe równanie przez x^4 i dodawszy potem wyrazy parami jak powiedziano, znajdziemy

F ~~$256\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-1024\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-2560\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6144\left(x+\frac{1}{x}\right)+5888=0$~~

Kładzie teraz $x+\frac{1}{x}=z$ oraz za różne dwumiany wartości w z wyżej wskazane, a potem upraszczając, otrzymamy:

~~$256z^4-1024z^3-3584z^2+9216z+11520=0$~~

(Dzieląc jeszcze to równanie przez 256, znajdziemy) ~~nareszcie~~

$$z^4-4z^3-14z^2+36z+45=0$$

[~~+36~~ corrected to -14]

równanie czwartego stopnia które ogólnie rozwiązać umiemy. Nie używając tu atoli ogólnych na ten cel wzorów, bo ich tu nie podałem, zastosujmy [raczej] prawidło wskazane w § 20. Dokładnemi dzielnikami ostatniego wyrazu są 1, 3, 5, 9, 45; jeżeli więc to równanie ma przynajmniej niektóre pierwiastki całkowite, te nie mogą być innemi jak co dopiero rzeczone dzielniki. Równanie jest zupełne i ma dwie przemiany i dwa następstwa znaków, ma więc dwa dodatne a dwa odjemne pierwiastki jeżeli wszystkie są rzeczywiste. Probując naprzód dzielników 3 i 5 jako dodatnych, znajdziemy że rzeczywiście te dwie liczby są dwoma pierwiastkami ostatniego równania. Mając to zamiast dopowiadać innych dzielników dla znalezienia dwóch innych pierwiastków, podzielmy wielomian równania przez ~~$(x-3)(x-5)=x^2-8x$~~ $(z-3)(z-5)=z^2-8z+15$ a iloraz zrównawszy do zera znajdziemy $z^2+4z+3=0$ skąd $z=-2\pm1$; dwa zatem inne pierwiastki są $z=-1$ i $z=-3$. Ostatniego tedy równania pierwiastki są:

$$z_1=3,\ z_2=5,\ z_3=-1,\ z_4=-3$$

Te wartości kładąc jedna po drugiej w wyrażeniu pierwiastków równania pierwotnego, t.j. w wyrażeniu $x=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4}}{2}$, znajdziemy pierwiastki równania założonego jak następuje:

dla $z=3$ ...... $x_1=\frac{3+\sqrt5}{2}$ ..... $x_2=\frac{3-\sqrt5}{2}=\frac{2}{3+\sqrt5}$

$z=5$ ...... $x_3=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$ ..... $x_4=\frac{5-\sqrt{21}}{2}=\frac{2}{5+\sqrt{21}}$

$z=-1$ ..... $x_5=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ .... $x_6=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$

$z=-3$ ..... $x_7=\frac{-3+\sqrt5}{2}$ .... $x_8=\frac{-3-\sqrt5}{2}=\frac{2}{-3+\sqrt5}$.

Jeżeli w równaniu odwrotnem [stopnia parzystego] ~~wyrazy~~ jednakowo od skrajnych odległe mają znaki przeciwne, wtedy brakuje w niem [koniecznie] środkowego wyrazu. Niech takiem równaniem będzie

$$x^8+a_1x^7+a_2x^6+a_3x^5-a_3x^3-a_2x^2-a_1x-1=0$$

Dodawszy wprost wyrazy parami jednakowo od skrajnych odległe, będzie:

$$(x^8-1)+a_1x(x^6-1)+a_2x^2(x^4-1)+a_3x^3(x^2-1)=0$$

które równanie jak widzimy podzielnem jest przez x^2-1, z czego wypada że $x=\pm1$ t.j. że takie równanie ma dwa pierwiastki $+1$ i -1. Wykonawszy raz dzielenie i uporządkowawszy wypadek, znajdziemy:

$$x^6+a_1x^5+(1+a_2)x^4+(a_1+a_3)x^3+(1+a_2)x^2+a_1x+1=0$$

t.j. znajdziemy równanie odwrotne postaci o jakiej już mówiliśmy; nie potrzebuje przeto nowego objaśnienia, bo całe postępowanie jest zupełnie toż samo jak wyżej.

Jeżeli odwrotne zrównanie jest stopnia nieparzystego, ma w każdym przypadku pierwiastek +1 lub −1 według tego jak ostatni jego wyraz jest odjemny lub dodatny. Skoro więc wielomian takiego zrównania podzielimy przez czynnik pierwiastkowy $x-1$ lub $x+1$, zniżymy je o jeden stopień; da nam więc iloraz zrównany do zera, zrównanie parzystego stopnia a do tego będzie również zrównaniem odwrotnem. Nie dowodzę tego, bo się każdy o tem łatwo przekona uciąwszy zrównanie odwrotne nieparzystego stopnia pod ogólną postacią, lub też, co jeszcze prędzej prowadzi do celu zrównanie stopnia oznaczonego, i podzieliwszy jego wielomian przez $x-1$ lub $x+1$ według tego jak się wyżej powiedziało. Ja wezmę jako przykład zrównanie liczbowe następujące:

$$5x^7-3x^6+7x^5+2x^4+2x^3+7x^2-3x+5=0$$

Ponieważ to zrównanie ma jeden pierwiastek $x=-1$, podzieliwszy zatem jego wielomian przez $x+1$ i zrównawszy iloraz do zera, znajdziemy

$$5x^6-8x^5+15x^4-13x^3+15x^2-8x+5=0$$

zrównanie odwrotne stopnia parzystego z którem obchodząc się jak poprzednio powiedziano, znajdziemy naprzód

$$5\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+15\left(x+\frac{1}{x}\right)-13=0$$

a położywszy $x+\frac{1}{x}=z$ i zadowoliwszy warunki w z oraz uprościwszy co można, otrzymamy

$$5z^3-8z^2+3=0$$

To zrównanie, jak nie trudno dostrzedz bez wszelkiego próbowania, ma jeden pierwiastek $z=1$, podzieliwszy więc jego wielomian przez $z-1$ i iloraz zrównawszy do zera, otrzymamy zrównanie

$$5z^2-3z-3=0$$

z którego $z=\frac{3\pm\sqrt{69}}{10}$

Ale $x=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4}}{2}$, więc też będzie

dla $z=1$ .... $x_1=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ .... $x_2=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{2}{1+\sqrt{-3}}$

dla $z=\frac{3+\sqrt{69}}{10}$ ... $x_3=\frac{3+\sqrt{69}+\sqrt{-322+6\sqrt{69}}}{20}$

~~$z=\frac{3+\sqrt{69}}{10}$~~ ... $x_4=\frac{3+\sqrt{69}-\sqrt{-322+6\sqrt{69}}}{20}=\frac{20}{3+\sqrt{69}+\sqrt{-322+6\sqrt{69}}}$

$z=\frac{3-\sqrt{69}}{10}$ ... $x_5=\frac{3-\sqrt{69}+\sqrt{-322-6\sqrt{69}}}{20}$

~~$z=\frac{3-\sqrt{69}}{10}$~~ ... $x_6=\frac{3-\sqrt{69}-\sqrt{-322-6\sqrt{69}}}{20}=\frac{20}{3-\sqrt{69}+\sqrt{-322-6\sqrt{69}}}$

Na początku zaraz znaleźliśmy jeden pierwiastek $x=-1$. Widzimy tu zarazem że podane zrównanie ten tylko jedyny ma pierwiastek rzeczywisty, wszystkie inne są urojonemi.

Przyjrawszy z uwagę wszystko co się powiedziało o zrównaniach odwrotnych, dostrzeżemy że te mogą być ogólnie rozwiązanemi aż do stopnia dziewiątego włącznie.

Wszystkie nareszcie zrównania ogólnej postaci

$$x^n+a_1rx^{n-1}+a_2r^2x^{n-2}+a_3r^3x^{n-3}+\ldots\pm a_3r^{n-3}x^3\pm a_2r^{n-2}x^2\pm a_1r^{n-1}x\pm r^n$$

skoro tylko n nie większe od 9, tymże samym sposobem rozwiązać można, bo dzieląc wielomian takiego zrównania przez r^n, zamienimy je na odwrotne, a kładąc jeszcze $x=rx'$ czyli $\frac{x}{r}=x'$, otrzymamy to samo zrównanie o jakiem dotąd mówiliśmy. —

W najbliższym związku ze równaniami odwrotnemi stoją równania dwuwyrazowe dlatego tak nazwane, że mają tylko dwa wyrazy, mianowicie wyraz mający najwyższą potęgę nieznanej ilości wskazującej stopień równania i wyraz ostatni t.j. niezależny od rzeczonej nieznanej.

Każde takie równanie wystawioném być może pod ogólną postacią

$$x^n \pm a = 0$$

Jeśli n jest liczbą parzystą, tedy równanie $x^n+a=0$ ma wszystkie n pierwiastków urojone, równanie zaś $x^n-a=0$ ma dwa rzeczywiste, jeden dodatny drugi odjemny a $n-2$ pierwiastki urojone. W przypadku, że n jest liczbą nieparzystą, to równanie ma zawsze jeden pierwiastek rzeczywisty z przeciwnym znakiem temu jaki ma liczba a, reszta zaś pierwiastków $n-1$ są urojonemi.

Weźmy tu tylko pod uwagę równanie $x^n-a=0$. Położywszy tu $x=z\sqrt[n]{a}$, otrzymamy $z^n-1=0$ i do tej postaci sprowadza się każde dwuwyrazowe równanie. Ponieważ to ostatnie równanie, bądź ono jest stopnia parzystego bądź nieparzystego, ma zawsze pierwiastek $z=1$, podzieliwszy je przeto przez czynnik pierwiastkowy $z-1$, znajdziemy, równając iloraz do zero

$$z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+z^{n-4}+\dots+z^3+z^2+z+1=0$$

t.j. otrzymamy równanie odwrotne, które jeśli $n-1$ nie przewyższa liczby 9, nauczyliśmy się już poprzednio rozwiązać. Znalazłszy więc wszystkie pierwiastki ostatniego, mieć też będziemy i pierwiastki pierwszego równania. Niechby nam było podaném do rozwiązania równanie

$$x^7-5=0$$

tedy kładąc $x=z\sqrt[7]{5}$, zamienimy je na $z^7-1=0$. Dzieląc to ostatnie przez $z-1$, otrzymamy równanie odwrotne

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

z którego $\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0$

Kładąc dalej $z+\frac{1}{z}=y$ otrzymamy

$$y^3+y^2-2y-1=0$$

To ostatnie równanie rozwiązawszy, niech α, β, γ, będą jego pierwiastkami tedy też znajdziemy ze równania $z+\frac{1}{z}=y$

dla $y=\alpha \dots z_{1,2}=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$, dla $y=\beta \dots z_{3,4}=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4}}{2}$

$y=\gamma \dots z_{5,6}=\frac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4}}{2}$

Pierwiastkami przeto założonego równania będą

$$x_1=\sqrt[7]{5}$$
$$x_{2,3}=\sqrt[7]{5}\cdot\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$$
$$x_{4,5}=\sqrt[7]{5}\cdot\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4}}{2}$$
$$x_{6,7}=\sqrt[7]{5}\cdot\frac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4}}{2}$$

Dwuwyrazowe przeto równania rozwiązywać umiemy ogólnie aż do 10tego stopnia włącznie. Oprócz tego każde równanie dwuwyrazowe którego wykładnik rozłożyć można na dwa czynniki takie żeby żaden z nich liczby 7 nie przewyższał. W tym bowiem przypadku będzie postępowanie następującego działania. Tak np. ponieważ w równaniu $x^{15}-1=0$, $15=3.5$, więc położywszy $x^5=z$, otrzymamy $z^3-1=0$. Znalazłszy trzy pierwiastki tego tu równania i każdy z nich

położywszy z poprzedniem, otrzymamy $x^5 - Z = 0$, które rozwiązawszy sposobem jak wyżej, znajdziemy dla każdej wartości Z, pięć wartości czyli pierwiastków na x, wszystkich więc otrzymamy 15 jak być powinno.

W końcu czynię jeszcze uwagę, że najłatwiejszym i najwygodniejszym sposobem rozwiązania równań dwuwyrazowych, jest za pomocą funkcyj kołowych, co przy rozwinięciu wielkiego w całej Analizie wzoru Moivra, uczynić się znajdę.

Dodatek II.

Lubo z poprzedniego mojego zestawienia znakomitszych sposobów rozwiązania równań stopniowych wykluczyłem tak funkcyje trygonometryczne jako też teoryję linij trygonometrycznych, oraz rachunek wyższy, [F] sądzę jednak, że nie będzie nieprzyjemnem dla uczących się napotkać tu, chociaż w dodatku, trygonometryczne rozwiązanie równań trzeciego stopnia.

[F] i jak widzieliśmy można się bez tego obejść,

Każde równanie trzeciego stopnia po wyrugowaniu z niego drugiego wyrazu sprowadza się do postaci $x^3+px+q=0$, a wzór Cardana

$$x = \sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{p^3}{27}}\right\}}+\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{p^3}{27}}\right\}}$$

daje nam jeden pierwiastek. Ponieważ obrachowanie tego pierwiastka podlega wielu trudnościom, szczególniej gdy równanie ma wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste nie równe, wprowadzono zatem w ten wzór linije trygonometryczne wielce ułatwiające ten rachunek. A że największa trudność pochodzi z pierwiastka kwadratowego $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{p^3}{27}}$, więc też do tej części skierowano całe usiłowanie, a przeważnie dlatego, że ten pierwiastek pokazać się nawet może pod postacią urojoną. Trzy bowiem przypadki są tu możliwe, mianowicie: $\frac{1}{4}q^2+\frac{p^3}{27}>0$ czyli dodatna ilość, albo $\frac{1}{4}q^2+\frac{p^3}{27}=0$, co tylko wtedy być może gdy p jest odjemnem i $\frac{1}{4}q^2=\frac{p^3}{27}$, lub nareszcie $\frac{1}{4}q^2+\frac{p^3}{27}<0$ czyli ilość odjemna, a wtedy wszystkie trzy pierwiastki są rzeczywiste i nie równe. Ponieważ w drugim przypadku wypadnie

$$x=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}=-2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}$$

i w takim razie trzy pierwiastki są rzeczywiste i takie, że dwa z nich są sobie równe a trzeci jest podwójnym każdego, i ze znakiem przeciwnym, zatem linije trygonometryczne stosować tylko będziemy do pierwszego i ostatniego przypadku. [A]

Przedewszystkiem wzór Cardana napiszmy następnie

$$x=\sqrt[3]{\left\{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{p^3}{27}}\right\}}-\sqrt[3]{\left\{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{p^3}{27}}\right\}}$$

Biorąc teraz pierwszy przypadek t. j. że $\frac{1}{4}q^2+\frac{p^3}{27}>0$, widzimy że to być może tak dla p dodatnego jako też i odjemnego. Rozłączyć nam przeto potrzeba oba przypadki iżbyśmy widzieli jakie linije trygonometryczne wprowadzić nam wypadnie. Ponieważ $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{p^3}{27}}=\frac{1}{2}\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}$, więc położywszy $\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}=P$, wzór Cardana pierwej tak napisać możemy $x=\sqrt[3]{\left\{-\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}P\right\}}-\sqrt[3]{\left\{\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}P\right\}}$

Weźmy teraz przypadek że w danem równaniu p jest dodatnem. W tym razie, ponieważ $P = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} = q\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}$, widzimy że ilość pod znakiem pierwiastkowym jest większą od 1; ale $\frac{4p^3}{27q^2}$ przyjmować może wszelkie pomyślić się mogące dodatnie ~~wartości~~, zatem wprowadzając tu liniją trygonometryczną, wprowadzić potrzeba taką, któreby wszelkie pomyślić się mogące wartości zawsze mieć mogła, rozumie się wartości dodatne bo cała ilość pod znakiem pierwiastkowym jest dodatną z powodu p. Że z trygonometrycznych linij te właśnie mających się tylko styczna, i dotyczna, i sieczne, przeto jedną z nich wprowadzić możemy i to którą kolwiek. Wprowadźmy styczną, mianowicie połóżmy $\frac{4p^3}{27q^2} = sty.\alpha^2$ skąd $sty.\alpha = \frac{2}{q}\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, a następnie $q = \frac{2}{sty.\alpha}\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

Tym sposobem mieć będziemy $P = \frac{2}{sty.\alpha}\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1 + sty.\alpha^2} = \frac{2}{sty.\alpha}\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{dost.\alpha}$
$= \frac{2\,dost.\alpha}{wst.\alpha}\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{dost.\alpha} = \frac{2}{wst.\alpha}\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$. We wzorze Cardana położywszy wartości za P i q, otrzymamy

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{sty.\alpha} + \frac{1}{wst.\alpha}} - \sqrt[3]{\frac{1}{sty.\alpha} + \frac{1}{wst.\alpha}}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1 - dost.\alpha}{wst.\alpha}} - \sqrt[3]{\frac{1 + dost.\alpha}{wst.\alpha}}\right)$$

Że $1 - dost.\alpha = 2wst.\tfrac{1}{2}\alpha^2$, $1 + dost.\alpha = 2\,dost.\tfrac{1}{2}\alpha^2$, $wst.\alpha = 2wst.\tfrac{1}{2}\alpha\; dost.\tfrac{1}{2}\alpha$
zatem
$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{sty.\tfrac{1}{2}\alpha} - \sqrt[3]{doty.\tfrac{1}{2}\alpha}\right)$$
Położywszy jeszcze $\sqrt[3]{sty.\tfrac{1}{2}\alpha} = sty.\beta$, otrzymamy
$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\,(sty.\beta - doty.\beta)$$
Lecz $sty.\beta - doty.\beta = \frac{wst.\beta}{dost.\beta} - \frac{dost.\beta}{wst.\beta} = -\frac{dost.\beta^2 - wst.\beta^2}{wst.\beta\, dost.\beta} = -\frac{2\,dost.2\beta}{wst.2\beta} = -2\,doty.2\beta$
zatem $x = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\,doty.2\beta$.

Jeśli więc w danem równaniu p jest dodatnem, cały rachunek pierwiastka sprowadza się do obrachowania $sty.\alpha = \frac{2}{q}\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ a potem $sty.\beta = \sqrt[3]{sty.\tfrac{1}{2}\alpha}$, z czego zaraz otrzymamy pierwiastek rzeczywisty z ostatniego wyrażenia.

Jeśli p jest odjemnem, wtedy (ponieważ) $P = q\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}$ musi być rzeczywistem, co wymaga iżby $\frac{4p^3}{27q^2}$ jedności nie przenosiło, chcąc zatem wprowadzić funkcyję kołową, wprowadzić potrzeba taką, iżby nigdy jedności przewyższyć nie mogła; takiemi zaś funkcyjami są tylko wstawa i dostawa, jedną też z nich wprowadzić zawsze można ~~Kładąc np~~ $\frac{4p^3}{27q^2} = wst.\alpha^2$ t.j. $wst.\alpha = \frac{2}{q}\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, skąd $q = \frac{2}{wst.\alpha}\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ zaś $P = q\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}} = \frac{2}{wst.\alpha}\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1 - wst.\alpha^2} = 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} doty.\alpha$, a nareszcie:

$$x = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{wst.\alpha} + doty.\alpha} - \sqrt[3]{\frac{1}{wst.\alpha} + doty.\alpha}\right) = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1 - dost.\alpha}{wst.\alpha}} + \sqrt[3]{\frac{1 + dost.\alpha}{wst.\alpha}}\right)$$
albo jak wyżej
$$x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{sty.\tfrac{1}{2}\alpha} + \sqrt[3]{doty.\tfrac{1}{2}\alpha}\right)$$
Nakoniec położywszy $\sqrt[3]{sty.\tfrac{1}{2}\alpha} = sty.\beta$, będzie
$$x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\,(sty.\beta + doty.\beta) = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{wst.\beta\, dost.\beta}$$
t.j. $x = -\frac{2}{wst.2\beta}\sqrt{-\frac{p}{3}}$

Skoro więc daném jest równanie $x^3 + px + q = 0$ a współczynnik p jest odjemnym i do tego $\left(\frac{1}{2}q\right)^2 > \left(\frac{p}{3}\right)^3$, pierwiastek rzeczywisty tego równania jest $x = -\frac{2}{wst.2\beta}\sqrt{-\frac{p}{3}}$

Przystępujęż nareszcie do ostatniego przypadku t.j. gdy $\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27} < 0$, co wtedy tylko być może gdy p odjemne i takie że $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Jest to przypadek nazwany od dawnych Algebraistów nieprzywiedlnym (casus irreducibilis.) Ponieważ w takim razie ilość wyżej przez P oznaczona będzie postaci urojonej i tej niemożna się w żaden sposób pozbyć, więc i wprowadzenie funkcyi

trygonometrycznej jest niepodobném. W takim razie nie pozostaje nam nic innego, jak poszukać między wzorami trygonometrycznemi takiego, któryby pod pewnym względem porównać można ze równaniem trzeciego stopnia a którego drugi wyraz został wyrzuconym.

Najprościej przy tém wzór znajdujemy co wyrażenia wstawy lub dostawy potrójnego, przez wstawę lub dostawę pojedynczego łuku, mianowicie znajdujemy: $wst. 3\alpha = 3 wst. \alpha - 4 wst. \alpha^3$ i $dost. 3\alpha = 4 dost. \alpha^3 - 3 dost. \alpha$ (Zupełnie tu jest dowolném użyć pierwszego lub drugiego z tych równań. Ja użyję pierwszego.

Chcąc z tego równania trygonometrycznego przejść do algebraicznego, dosyć jest położyć $wst. \alpha = \frac{x}{r}$, przyjdzie bowiem na

$$wst. 3\alpha = \frac{3x}{r} - \frac{4x^3}{r^3} \quad \text{czyli} \quad x^3 - \frac{3r^2}{4}x + \frac{r^3}{4} wst. 3\alpha = 0$$

Jeden pierwiastek tego równania [F] jest $x = r\,wst. \alpha$, a chociaż ilości [F które nazwiemy przybranemi] czyli raczej liczby r i $wst. \alpha$ są jeszcze nieznane po ogólne, wszelako w dalszym ciągu zobaczymy jak się łatwo wyznaczają. Tymczasem tu raczej chodzi o to że ~~[illegible]~~ ponieważ łuku 3α znajdują się w równaniu nieskończoną liczbę wartości których wstawy są też same, ~~[illegible]~~ których więc wartości wybrać należy? ~~[illegible]~~ Wiadomo bowiem iż łuki różniące się o jakąkolwiek liczbę całkowitych okręgów koła, mają wszystkie linije trygonometryczne też same, więc też, jeżeli przez π oznaczymy, jak zwyczajnie Geometrowie robią, połowę okręgu koła czyli 180°, wszystkie łuki jak następujące:

$$3\alpha,\ 2\pi+3\alpha,\ 4\pi+3\alpha,\ 6\pi+3\alpha,\ 8\pi+3\alpha;\ 10\pi+3\alpha \quad i\ t.\ d.$$

mieć będą wstawy też same, a więc i łuk α który ~~[illegible]~~ ze przybranem i równaniem ~~[illegible]~~ wchodzi wskład pierwiastka, może być trzecią częścią każdego z powyższych, mianowicie łuk α może mieć następujące wartości

$$\alpha,\ \tfrac{2}{3}\pi+\alpha,\ \tfrac{4}{3}\pi+\alpha,\ 2\pi+\alpha,\ 2\pi+\tfrac{2}{3}\pi+\alpha,\ 2\pi+\tfrac{4}{3}\pi+\alpha,\ i\ t.\ d.$$

Nie dość na tém, bo takie następujące łuki

$$\pi-3\alpha,\ 3\pi-3\alpha,\ 5\pi-3\alpha,\ 7\pi-3\alpha,\ 9\pi-3\alpha,\ i\ t.\ d.$$

wszystkie mają też same wstawy, dla czego łuk α może też być trzecią częścią każdego z nich, mieć przeto może wartości

$$\tfrac{1}{3}\pi-\alpha,\ \pi-\alpha,\ \tfrac{5}{3}\pi-\alpha,\ 2\pi+\tfrac{1}{3}\pi-\alpha,\ 2\pi+\tfrac{3}{3}\pi-\alpha \text{ czyli } 2\pi+\pi-\alpha,\ i\ t.\ d.$$

Ponieważ jak do każdego łuku można dodawać i ~~[illegible]~~ się podoba całkowitych okręgów, tak też i odrzucać można bez żadnej zmiany których linii trygonometrycznej, więc z pierwszych łuków po odrzuceniu całkowitych okręgów będą

$$\alpha,\ \tfrac{2}{3}\pi+\alpha,\ \tfrac{4}{3}\pi+\alpha,\ \alpha,\ \tfrac{2}{3}\pi+\alpha,\ \tfrac{4}{3}\pi+\alpha,\ i\ t.\ d$$

drugie zaś $\tfrac{1}{3}\pi-\alpha,\ \pi-\alpha,\ \tfrac{5}{3}\pi-\alpha,\ \tfrac{1}{3}\pi-\alpha,\ \pi-\alpha,\ i\ t.\ d.$

t. j. tak w pierwszym jako i drugim rzędzie tylko trzy są różne mianowicie w pierwszym $\alpha,\ \tfrac{2}{3}\pi+\alpha,\ \tfrac{4}{3}\pi+\alpha$, a w drugim $\tfrac{1}{3}\pi-\alpha,\ \pi-\alpha$, i $\tfrac{5}{3}\pi-\alpha$.

Pokażemy jeszcze że pierwsze mają te same wstawy jak drugie. Że $wst.\alpha = wst.(\pi-\alpha)$ jest wiadomém bo łuki α i $\pi-\alpha$ spełniają się do półokręgu czyli do π. Że $wst.(\tfrac{2}{3}\pi+\alpha) = wst(\tfrac{1}{3}\pi-\alpha)$, łatwo okazać, bo $wst.(\tfrac{2}{3}\pi+\alpha) = wst.(\pi-\tfrac{2}{3}\pi-\alpha) = wst.(\tfrac{1}{3}\pi-\alpha)$. Następnie

$$wst.(\tfrac{4}{3}\pi+\alpha) = wst.(\pi-\tfrac{4}{3}\pi-\alpha) = wst.(-\tfrac{1}{3}\pi-\alpha) = -wst.(\tfrac{1}{3}\pi+\alpha)$$

zaś $wst.(\tfrac{5}{3}\pi-\alpha) = -wst.(2\pi-\tfrac{5}{3}\pi+\alpha) = -wst.(\tfrac{1}{3}\pi+\alpha)$

Owoż w owej wielości łuków, znaleźliśmy tylko trzy których wstawy są różne, na dowód że one tylko mogą wchodzić w skład trzech pierwiastków równania $x^3 - \frac{3r^2}{4}x + \frac{r^3}{4}\,\text{wst.}\,3\alpha = 0$.

Wziąwszy najprostsze wyrażenia tych trzech łuków, pierwiastkami ostatniego równania będą $x_1 = r\,\text{wst.}\,\alpha$, $x_2 = r\,\text{wst.}(\frac{1}{3}\pi - \alpha)$, $x_3 = -r\,\text{wst.}(\frac{1}{3}\pi + \alpha)$ albo, ponieważ $\frac{1}{3}\pi = 60°$, $x_1 = r\,\text{wst.}\,\alpha$, $x_2 = r\,\text{wst.}(60° - \alpha)$, $x_3 = -r\,\text{wst.}(60° + \alpha)$.

Chcemy teraz rozwiązać równanie $x^3 + px + q = 0$ w którém p jest odjemne i oprócz tego $(\frac{1}{2}q)^2 < (\frac{p}{3})^3$, które przeto jest w przypadku nieprzywiedlnym, potrzeba je tylko porównać z poprzedzającém dla oznaczenia wartości r i $\text{wst.}\,3\alpha$. Jakoż, ponieważ $-\frac{3r^2}{4} = p$ a $\frac{r^3}{4}\,\text{wst.}\,3\alpha = q$, zatém z pierwszego mamy $r^2 = -\frac{4}{3}p$ czyli $r = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$, z drugiego zaś $\text{wst.}\,3\alpha = \frac{4q}{r^3}$. Ale $r^3 = 8(-\frac{p}{3})^{\frac{3}{2}}$ więc $\text{wst.}\,3\alpha = \frac{q}{2(-\frac{p}{3})^{\frac{3}{2}}}$. Cały przeto rachunek sprowadza się do obrachowania naprzód r i $\text{wst.}\,3\alpha$, a mając 3α mamy też α i ~~raz~~ raz odjąwszy α od $60°$ a drugi raz dodawszy, z trzema łukami α, $60° - \alpha$ i $60 + \alpha$ oraz z ilością r, znajdziemy trzy pierwiastki jak je wyżej podałem.

Dajmy choć po jednym przykładzie tego trygonometrycznego rachunku w każdym z wyłuszczonych tu trzech przypadków.

<u>Przykład 1.</u> W § 28 znaleźliśmy rzeczelny pierwiastek równania

$$x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$$

$x = 3{\cdot}3621659$ przybliżony w siedmiu cyfrach. Szukajmyż go za pomocą funkcyj kołowych. Na ten koniec potrzeba naprzód to równanie przywieść do postaci $x^3 + px + q = 0$ t. j. potrzeba z niego wyrzucić wyraz drugi. Położywszy $x = z + \frac{12}{3} = z + 4$, co na to samo wychodzi co zmniejszyć jego pierwiastki o 4, otrzymamy $z^3 + 9z + 6 = 0$, więc $p = 9$ a $q = 6$. Ponieważ p jest dodatném, dla otrzymania pierwiastku potrzeba wprowadzić styczną trygonometryczną, a dla tego położywszy $\text{sty.}\,\alpha = \frac{2}{q}(\frac{p}{3})^{\frac{3}{2}}$ będzie $\text{sty.}\,\alpha = \frac{2}{6}(3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{27} = \sqrt{3}$, więc $\log.\sqrt{3} = 0{\cdot}2385606 = \log.\,\text{sty.}\,\alpha$, przeto $\alpha = 60°$ a następnie $\frac{1}{2}\alpha = 30°$. $\log.\,\text{sty.}\,30° = 9{\cdot}7614394$ więc $\log.\sqrt[3]{\text{sty.}\,\frac{1}{2}\alpha} = 9{\cdot}9204798 = \log.\,\text{sty.}\,\beta$, zatém $\beta = 39°\,47'\,0''89$ a $2\beta = 79°\,34'\,1''78$. Nareszcie

$$\begin{aligned}
\log.\,2 &= 0{\cdot}3010300 - \\
\log.\sqrt{\tfrac{p}{3}} &= 0{\cdot}2385606 \\
\log.\,\text{dosty.}\,2\beta &= 9{\cdot}2637171 \\
\hline
\log.\,z &= 9{\cdot}8047077 - \\
\text{więc}\quad z &= -0{\cdot}6378341
\end{aligned}$$

Ale $x = 4 + z$, więc $x = 3{\cdot}3621659$, zupełnie zgodnie z powołanym §.

<u>Przykład 2.</u> W §§ 36 i 55 znaleźliśmy rzeczelny pierwiastek równania $x^3 - 5x - 7 = 0$, szukajmy go sposobem tu wskazanym. Ponieważ tu $p = -5$ a $q = -7$, tudzież $(\frac{7}{2})^2 > (\frac{5}{3})^3$, zatém wprowadzimy tu wstawę t. j. położymy $\text{wst.}\,\alpha = -\frac{2}{7}(+\frac{5}{3})^{\frac{3}{2}}$, będzie więc

$$\begin{aligned}
\log.\,-\tfrac{2}{7} &= 9{\cdot}4559320 - \\
\log.(\tfrac{5}{3})^{\frac{3}{2}} &= 0{\cdot}3327730 \\
\hline
\log.\,\text{wst}\,\alpha &= 9{\cdot}7887050 -
\end{aligned}$$

więc $\alpha = -37°\,56'\,3''92$, $\frac{1}{2}\alpha = -18°\,58'\,1''96$

$\log.\,\text{sty.}\,\frac{1}{2}\alpha = 9{\cdot}5361639 -$ zatém $\log.\sqrt[3]{\text{sty.}\,\frac{1}{2}\alpha} = 9{\cdot}8453880 - = \text{sty.}\,\beta$ a $\beta = -35°\,0'\,35''98$ zaś $2\beta = -70°\,1'\,11''96$. Nareszcie ponieważ $x = -\frac{2}{\text{wst.}\,2\beta}\sqrt{\frac{5}{3}}$, będzie

$$\begin{aligned}
\log.\,2 &= 0{\cdot}3010300 - \\
\log.\sqrt{\tfrac{5}{3}} &= 0{\cdot}1109243 \\
\text{dopt.}\,\log.\,\text{wst}\,2\beta &= 0{\cdot}0269591 - \\
\hline
\log.\,x &= 0{\cdot}4389134 +
\end{aligned}$$

więc $x = 2{\cdot}747346$

Ten pierwiastek zupełnie się zgadza w pięciu cyfrach z znalezionym w powołanych §§.

Przykład 3. Szukajmy ~~równania~~ pierwiastków równania

$$x^3 - 7x - 7 = 0$$

~~To porównane ze równaniem~~

Ponieważ tu p odjemne i oprócz tego $\left(\frac{7}{2}\right)^2 < \left(\frac{7}{3}\right)^3$, znajduje się zatem toż równanie w przypadku nieprzywiedlnym; porównawszy je więc ze zrobioném przysposobioném $x^3 - \frac{3r^2}{4}x + \frac{r^3}{4}\cos.3\alpha = 0$, znajdziemy

$\frac{3r^2}{4} = 7$, skąd $r = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, potem $\frac{r^3}{4}\cos.3\alpha = -7$ skąd $\cos.3\alpha = -\frac{28}{r^3}$

t. j. $\cos.3\alpha = -\frac{28}{\frac{56}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} = -\frac{3}{2\sqrt{\frac{7}{3}}}$, zatem

$\log.2 = 0.3010300$
$\log\sqrt{\frac{7}{3}} = 0.1839883$
$\log r = 0.4850183$

$\log.3 = 0.4771213-$
$\log.2\sqrt{\frac{7}{3}} = 0.4850183$
$\log.\cos.3\alpha = 9.9921030-$
$3\alpha = -79^\circ\ 6'\ 24''.20$
$\alpha = -26\ 22\ 8.07$
$60-\alpha = 86\ 22\ 8.07$
$60+\alpha = ~~111~~\ 33\ 37\ 51.93$

nareszcie:

$\log.r = 0.4850183$ .... 0.4850183 ...... 0.4850183
$\log.\cos\alpha = 9.6475288-$ $\log.\cos(60-\alpha) = 9.9991272$ $\log.\cos(60+\alpha) = 9.7433870-$
$\log.x_1 = 0.1325471-$ $\log.x_2 = 0.4841455$ $\log.x_3 = 0.2284053-$
$x_1 = -1.356897$ $x_2 = 3.048916$ $x_3 = -1.692019$